

КОСТАДИН ТРЕНЧЕВСКИ БИЛЈАНА КРСТЕСКА
ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ СНЕЖАНА ЗДРАВЕСКА

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

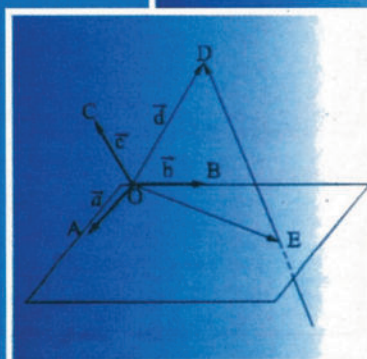
ЗА ТРЕТА ГОДИНА
НА РЕФОРМИРАНОТО ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$



$$U = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(5) + f(7) = 2\}$$



КОСТАДИН ТРЕНЧЕВСКИ БИЛЈАНА КРСТЕСКА
ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ СНЕЖАНА ЗДРАВЕСКА

**ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА
И
АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА**

ЗА ТРЕТА ГОДИНА

**НА РЕФОРМИРАНОТО
ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ
(ИЗБОРЕН ПРЕДМЕТ)**

IV ИЗДАНИЕ



ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 2017

Уредник:
Билјана СТОЈОСКА-ЗЛАТКОВ

Рецензенти:

д-р Димитра КАРЧИЦКА, редовен професор
на ПМФ (во пензија)

Зорка ХРИСТОВСКА, професор при ДСУ
„Таки Даскало“ – Битола

Петруш ЏОРЛЕВ, професор по математика
ДСУ „Јане Сандански“ – Струмица

Со решение на Министерот за образование и
наука на Република Македонија бр. 11-3878/1
од 15. 07. 2004 година се одобрува употребата
на овој учебник.

Предговор

Учебникот ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА за трета година на гимназиското образование е пишуван според Наставната програма за истоимениот изборен предмет за трета година на реформираното гимназиско образование. Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на наставата. Учебникот се состои од пет целини (заглавија). Во рамките на секое заглавие се обработени предвидените содржини, кои по правило се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секое заглавие се дадени задачи за вежбање, а на крајот од учебникот се дадени кратки одговори или решенија на задачите, при што по избор на авторите, некаде има и упатство за нивно решавање.

Во првото заглавие се воведени поимите детерминанта од втор ред и детерминанта од трет ред. Во продолжение е претставен методот на детерминанти за решавање на системи линеарни равенки со две и со три непознати.

Совладувањето на материјалот изложен во второто заглавие дава можност за проширување на знаењата во врска со поимот вектор. Поточно, се дефинира поимот вектор во простор, а потоа во множеството вектори се воведени операциите собирање и одземање, како и операциите множење на вектор со број, скаларно и векторско множење на вектори.

Третото заглавие е посветено на обработка на делови од аналитичка геометрија во простор, што подразбира воведување на концепти за алгебарско задавање на геометриските објекти. Така, на пример во избран координатен систем, точките и векторите се задаваат со нивните координати, а правите и рамнините со нивните равенки. На тој начин геометриските задачи може да се решаваат со алгебарски методи и обратно, алгебарските задачи да се интерпретираат геометриски.

Четвртото заглавие е посветено на дефинирање и на изучување на својствата на структурата векторски простор.

Во последното заглавие се обработени делови од линеарна алгебра. Поточно воведени се и проучени поимите линеарно пресликување и матрица. Се изучува Гаусовиот метод на елиминација за решавање на општ систем линеарни равенки, кој по својата универзалност е неприкосновен и во современата математика.

Посебна благодарност им должиме на рецензентите на овај учебник, особено на проф. д-р Димитра Карчицка, чии сугестии и забелешки придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците повеќе да ја засакаат математиката и да навлезат во нејзините тајни.

PROSVETNO DELO

1. ДЕТЕРМИНАНТИ И СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1.1. Детерминанти од втор ред

Нека a, b, c и d се дадени реални броеви и ad, bc се соодветните производи.

Дефиниција 1. Вредноста на изразот $ad - bc$, запишан шематски $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ се нарекува **детерминанта од втор ред**; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Броевите a, b, c и d се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Тие се распоредени во две **редици** (хоризонтално) и во две **колони** (вертикално), а накрсно формираат две **дијагонали**. Првата редица ја сочинуваат броевите a и b , а втората броевите c и d . Првата колона ја сочинуваат броевите a и c , а втората броевите b и d . Броевите a и d ја формираат **главната дијагонала**, а броевите b и c ја формираат **споредната дијагонала**.

Согласно со горекажаното може да заклучиме дека детерминантата од втор ред е еднаква на разликата од производите на елементите од главната и од споредната дијагонала.

Пример 1. Детерминантата $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ го претставува бројот -23 , бидејќи

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -8 - 15 = -23; \text{ се вели дека детерминантата има вредност } -23. \blacklozenge$$

Детерминантите од втор ред ги имаат следниве својства:

Својство 1. Вредноста на детерминантата не се менува, ако редиците се заменат со колони, запазувајќи го редниот број; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Својство 2. Детерминанта со две еднакви редици (колони) има вредност нула; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ $\left(\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0 \right)$.

Својство 3. Со замена на местата на двете редици (колони), вредноста на детерминантата го менува знакот во спротивен; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \right)$.

Својство 4. Ако елементите на една редица (колона) се еднакви на нула, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Својство 5. Вредноста на детерминантата се множи со број, кога со тој број ќе се помножат сите елементи од една редица (колона); значи $k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix}$ ($k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix}$).

Својство 6. Ако соодветните елементи од двете редици (колони) се пропорционални, вредноста на детерминантата е еднаква на нула; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$ ($\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} = 0$).

Својство 7. Вредноста на детерминантата не се менува, ако кон елементите на една редица (колона) ги додадеме соодветните елементи од другата редица (колона) помножени претходно со ист број k ; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$ ($\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix}$).

Својство 8. Ако секој елемент на некоја редица (колона) на детерминантата е збир од два собирока, тогаш детерминантата може да се претстави како збир од две детерминанти, во која сите елементи, со исклучок на елементите од односната редица (колона), се исти како во детерминантата. Во првата детерминанта – собирик, односната редица (колона) се состои од првите собироци, а во втората детерминанта се состои од вторите собироци, односно $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$ ($\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$).

Секое од горните својства на детерминантите од втор ред, лесно може да се провери со пресметување на вредноста на секоја детерминанта од двете страни на соодветното равенство. За илустрација ќе го изведеме својството 8.

$$L = \begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = (a+a')d - (c+c') \cdot b = ad + a'd - bc - bc' = (ad - bc) + (a'd - bc') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d \end{vmatrix} = D.$$



Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги вредностите на следниве детерминанти:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a^2 - ab + b^2 \\ a + b & a - b \end{vmatrix}.$$

2. Пресметај ја вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a+a^2 & ab-ac \end{vmatrix}$ користејќи некои од познатите својства на детерминанта.

3. Реши ги равенките:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x^2 - x & x^2 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x+2 & (x+2)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Реши ги неравенките:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & -2 \\ 4x & 2 \end{vmatrix} > 5; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} > 8; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 3x & x \\ 2x-4 & \end{vmatrix} > -14.$$

1.2. Систем од две линеарни равенки

За две линеарни равенки, за кои бараме заедничко решение, велиме дека претставуваат систем од линеарни равенки. Да се реши даден систем линеарни равенки значи да се најдат вредности на непознатите, кои ги задоволуваат двете равенки на системот. Во продолжение ќе го разгледаме решавањето на систем од две линеарни равенки со примена на поимот детерминанта од втор ред.

1.2.1. Систем од две линеарни равенки со две непознати

Нека $a_i, b_i, c_i, i=1,2$ се дадени реални броеви, а x, y се непознати. Тогаш

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad (1)$$

претставува систем од две линеарни равенки со две непознати; a_1, b_1, a_2, b_2 се коефициенти на системот, а c_1, c_2 се слободни членови.

Решение на системот (1) е секој подреден пар броеви (x_0, y_0) , за којшто двете равенки преминуваат во идентитети кога x ќе се замени со x_0 , а y со y_0 во (1).

Ако системот (1) има барем едно решение, велиме дека тој е **решлив**, а ако тој нема ниту едно решение, тогаш за него велиме дека е **противречен**. Решливиот систем којшто има единствено решение се вика **еднозначно решлив** или **определен**, ако пак тој има повеќе од едно решение, велиме дека е **неопределен**.

Нека системот (1) има решение (x_0, y_0) . Тогаш, точни се равенствата

$$\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 = c_1 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 = c_2 \end{cases} \quad (1')$$

Да претпоставиме дека $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $i=1,2$ и барем еден од слободните членови е различен од нула, односно $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогаш нема да бидат нарушени горните равенства, ако двете страни на првото равенство се помножат со b_2 , а на второто со $(-b_1)$. Значи, точни се равенствата

$$\begin{aligned} b_2(a_1 x_0 + b_1 y_0) &= b_2 c_1 \\ (-b_1)(a_2 x_0 + b_2 y_0) &= (-b_1) c_2 \end{aligned}$$

Земајќи ги предвид својствата на операциите множење и собирање на реални броеви овие равенства се сведуваат на равенствата

$$\begin{aligned} (a_1 b_2) x_0 + (b_1 b_2) y_0 &= b_2 c_1 \\ (-a_2 b_1) x_0 - (b_1 b_2) y_0 &= -b_1 c_2 \end{aligned}$$

Со собирање на левите и на десните страни се добива равенството

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x_0 = b_2 c_1 - b_1 c_2 \quad (2)$$

Аналогно, ако првото равенство на $(1')$ се помножи со $-a_2$, а второто со a_1 и така добиените равенства се соберат ќе се добие равенството

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y_0 = a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad (3)$$

Имајќи ја предвид дефиницијата на детерминанта од втор ред, изразот во заградата од левата страна на равенствата (2) и (3) , може да се замени со детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

којашто има вредност еднаква на $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Аналогно на ова, изразите од десната страна на (2) и (3) може да се заменат соодветно со детерминантите

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} (= c_1 b_2 - c_2 b_1) \quad \text{и} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} (= a_1 c_2 - a_2 c_1).$$

Значи, за решението (x_0, y_0) на системот (1) точни се равенствата

$$\Delta \cdot x_0 = \Delta_x \quad \text{и} \quad \Delta \cdot y_0 = \Delta_y \quad (4)$$

Сега, може да настанат следниве два случаи, кои заемно се исклучуваат:

Случај I. Ако $\Delta \neq 0$, тогаш (x_0, y_0) е единствено решение на системот (1) .

Навистина, за ненултиот број Δ постои инверзниот број (реципрочната вредност) $\frac{1}{\Delta}$

така што равенствата (4) со множење со $\frac{1}{\Delta}$ се сведуваат на равенствата

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \quad (5)$$

Од произволноста на решението (x_0, y_0) и од (5) следува дека тоа е единствено.

Погорната дискусија може да ја резимираме во следнава теорема:

Теорема 1. Ако детерминантата Δ на системот (1) е различна од нула, тогаш тој систем има единствено решение, определено со формулите (5).

Вообичаено, равенствата (5) се нарекуваат **Крамерови формули**.

Пример 1. За системот равенки $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ имаме $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, што значи дека тој има единствено решение (x_0, y_0) . Со наоѓање на $\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -7$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$, се добива $x_0 = \frac{-7}{7} = -1$, $y_0 = \frac{14}{7} = 2$. ♦

Случај II. Ако $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ тогаш системот има бескрајно многу решенија.

Навистина, равенствата

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \quad c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$$

согласно со претпоставката $a_i \neq 0, b_i \neq 0, i=1,2$ се сведуваат на $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ или,

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$. Земајќи, на пример, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k (\neq 0)$ се добива дека $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$ и $c_2 = kc_1$, што значи дека системот (1) има облик

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ ka_1 x + kb_1 y = kc_1 \end{cases}$$

којшто укажува дека равенките се еквивалентни т.е. секое решение на едната е решение и на другата. Затоа, едната равенка е излишна и може да се изостави, без да се изгуби некое решение на системот. Со изоставување, на пример, на втората равенка системот се сведува на една равенка,

$$a_1 x + b_1 y = c_1.$$

Тогаш, со избор на произволно t за една од непознатите, на пример, $y = t$ се добива точно определена вредност за x : $x = \frac{1}{a_1}(c_1 - b_1 \cdot t)$, така што подредените парови $\left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}t, t\right)$, за секој реален број t , го претставуваат множеството решенија на системот.

Пример 2. За системот равенки $\begin{cases} 3x - 6y = -15 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ имаме $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, од каде што заклучуваме дека подредените парови $(2t - 5, t)$, за секој реален број t , го претставуваат множеството решенија на системот. ♦

Но, не секој систем од две равенки со две непознати мора да има решение.

Пример 3. Системот $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ е противречен, т.е. нема ниедно решение бидејќи втората равенка може да се запише во вид $-(x - y) = 1$ и постоењето на решение (x_0, y_0) би значело постоење на реален број $x_0 - y_0$ и на неговиот спротивен $-(x_0 - y_0)$, коишто истовремено се еднакви на 1, што претставува противречност.

Анализата на овој систем укажува дека имаме ситуација кога $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, но $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ исто како и $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. ♦

Значи, за системот (1) заслужува внимание и случајот:

Случај III. Ако $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, тогаш системот е противречен.

Навистина, $\Delta = 0$ како и во вториот случај повлекува $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$, додека $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ значи $\frac{c_2}{c_1} \neq k$ т.е. $\frac{c_2}{c_1} = k + m$, $m \neq 0$. Тогаш системот (1) има облик

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ ka_1x + kb_1y = kc_1 + mc_1 \end{cases}$$

Значи, $a_1x + b_1y - c_1 = 0$ и истовремено $0 = k(a_1x + b_1y - c_1) = c_1m \neq 0$.

Пример 4. За системот равенки $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = -6; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -4$$

што значи дека тој е противречен. Во тоа може лесно да се убедиме, ако втората равенка ја замениме со еквивалентната равенка (делејќи ги двете страни со 2) $2x - 3y = 5$. За ниеден подреден пар $(\bar{x}, \bar{y})$, $2\bar{x} - 3\bar{y}$ не може истовремено да е еднакво на 5 и на 6. ♦

Да се потсетиме, на почетокот од дискусијата претпоставивме дека $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $i = 1, 2$ и барем еден од слободните членови е различен од нула, односно $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Во продолжение ќе разгледаме некои специјални случаи:

1⁰ Нека двата слободни члена се еднакви на нула, односно $c_1 = c_2 = 0$.

Тогаш системот (1) го добива обликот

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

и се нарекува **хомоген систем** од две линеарни равенки со две непознати.

Не е тешко да се воочи дека хомогениот систем секогаш има решение $x_0 = 0, y_0 = 0$, кое се нарекува **тривијално решение**. Затоа се поставува прашањето дали постои нетривијално решение $(\bar{x}, \bar{y})$ различно од тривијалното $(0, 0)$?

Ако $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ тогаш секој подреден пар реални броеви $(\bar{x}, \bar{y})$ претставува решение на системот.

Ако барем еден од коефициентите е различен од нула, на пример, $a_1 \neq 0$ тогаш првата равенка може да се замени со еквивалентна равенка $x = -\frac{b_1}{a_1}y$. Користејќи го ова втората

равенка добива облик $\left(b_2 - \frac{a_2 b_1}{a_1}\right)y = 0$ или $(a_1 b_2 - a_2 b_1)y = 0$ т.е. $\Delta \cdot y = 0$, каде $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Оттука следува дека ако $\Delta = 0$ тогаш за секоја вредност $\bar{y}$ на непознатата y и за вредност $\bar{x} = -\frac{b_1}{a_1}\bar{y}$ на непознатата x , парот $(\bar{x}, \bar{y})$ претставува решение на хомогениот систем; ако $\Delta \neq 0$ тогаш решение на равенката $\Delta \cdot y = 0$ е само $y_0 = 0$ и тогаш првата равенка е исполнета само за $x_0 = 0$ што значи дека системот има само тривијално решение $(0, 0)$.

2^o Нека барем еден од коефициентите на системот (1) е еднаков на нула.

Без губење на општоста може да се претпостави дека $a_1 = 0$. Со аналогна дискусија направена за системот (1) се добива дека системот: има единствено решение ако $\Delta \neq 0$; бескрајно многу решенија ако $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$; е противречен ако $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$.



Задачи за самостојна работа

1. Со помош на детерминанти реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} 8x - 3y = 13 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x - 10y = 35 \\ 3x + 16y = -33 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 10y = 1 \end{cases}$.

2. Реша ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 2y = \sqrt{2} \\ x - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{3} + 3y = \sqrt{3} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ bx + 4y = k \end{cases}$.

3. Најди ги вредностите на параметрите a и b за кои системот равенки $\begin{cases} 4x + 6y = a \\ 2x - by = 1 \end{cases}$:

а) има единствено решение; б) е неопределен; в) е противречен.

4. За кои вредности на параметарот k системот равенки $\begin{cases} kx - 6y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ има само тривијално решение?

5. За која вредност на k системот равенки $\begin{cases} kx - y = 4 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ е противречен?

6. Даден е системот равенки $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - my = n \end{cases}$. Најди вредности за m и n , за коишто системот:

а) има единствено решение; б) е противречен; в) е неопределен.

1.2.2. Систем од две линеарни равенки со три непознати

Со помош на детерминанти може да се решава и систем од две равенки со три непознати:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Можни се следниве случаи:

Случај I. Барем една од детерминантите

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \Delta_{xz} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \Delta_{yz} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

е различна од 0, на пример $\Delta_{yz} \neq 0$. Тогаш дадениот систем го запишуваме во облик

$$\begin{cases} b_1y + c_1z = d_1 - a_1x \\ b_2y + c_2z = d_2 - a_2x \end{cases}$$

Овој систем има единствено решение (y_0, z_0) за произволна вредност x_0 на x , имено,

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - a_1x_0 & c_1 \\ d_2 - a_2x_0 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}}; \quad z_0 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x_0 \\ b_2 & d_2 - a_2x_0 \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}},$$

така што x_0, y_0, z_0 претставува едно решение на системот. Со избор на друга вредност x_1 за непознатата x , добиваме друго решение на системот, x_1, y_1, z_1 .

Бидејќи x може да прима произволна реална вредност (секој реален број t може да биде вредност за непознатата x , системот може да има бескрајно многу решенија и

$$t, \frac{\begin{vmatrix} d_1 - a_1 t & c_1 \\ d_2 - a_2 t & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}}, \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1 t \\ b_2 & d_2 - a_2 t \end{vmatrix}}{\Delta_{yz}}$$

е општиот облик на овие решенија.

Пример 1. За системот $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases}$, $\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$, но $\Delta_{xz} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Затоа

системот го запишуваме во облик $\begin{cases} 2x + z = 1 + 2y \\ 3x + z = 3y \end{cases}$. Со избор на произволна вредност t за y и

со пресметување на $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 + 2t & 1 \\ 3t & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-t + 1}{-1} = t - 1$ и $z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 + 2t \\ 3 & 3t \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$, може да го запишеме општото решение $x = t - 1$, $y = t$, $z = 3$. ♦

Случај II. Трите детерминанти

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \Delta_{xz} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \Delta_{yz} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

се еднакви на нула, и при тоа $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$.

II₁. Ако $k = \frac{d_1}{d_2}$, тогаш системот се сведува на

$$\begin{cases} k(a_1 x + b_1 y + c_1 z) = k d_2 \\ (a_2 x + b_2 y + c_2 z) = d_2 \end{cases}$$

така што едната равенка е излишна. Тогаш дадениот систем има бесконечно многу решенија, бидејќи за секој избор на две непознати може да се одреди вредноста на третата непозната така што ќе важи равенство на левата и на десната страна.

Пример 2. Очигледно системот

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 6 \\ 4x - 8y + 6z = 12 \end{cases}$$

може да се запише во вид $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 6 \\ 2(2x - 4y + 3z) = 2 \cdot 6 \end{cases}$. Притоа, $\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_{xz} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$,

$\Delta_{yz} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ и $\frac{2}{4} = \frac{-4}{-8} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Општото решение на дадениот систем може да се

запише во вид $x = \frac{4x - 3y + 6}{2}$, y и z , кој укажува дека за y и z може да избереме

произволни реални вредности, $y = u$, $z = v$, а за x вредност $\frac{4u - 3v + 6}{2}$. ♦

И₂. Ако $k \neq \frac{d_1}{d_2}$, тогаш системот е противречен.

Пример 3. Ако првата равенка на системот $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 6 \\ 4x - 8y + 6z = 10 \end{cases}$ се помножи со 2 добиваме дека $4x - 8y + 6z = 12$, а тоа противречи на втората равенка $4x - 8y + 6z = 10$. Според тоа системот е противречен. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Да се реши системот равенки со три променливи:

а) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 5y + 3z = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 4x - 2y - 2z = -3 \end{cases}$.

2. Реша го системот хомогени равенки:

а) $\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6x - 4y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x - y + az = 0 \end{cases}$.

3. Покажи дека ако (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) се две различни решенија на системот равенки $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$, тогаш $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ е исто така решение на дадениот систем.

13 Детерминанти од трет ред

1.3.1. Дефиниција и основни поими

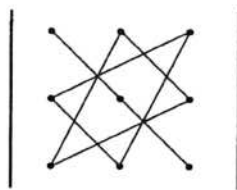
Нека a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) се дадени реални броеви.

Дефиниција 1. Вредноста на изразот $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$ запишан шематски $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ се нарекува **детерминанта од трет ред**; значи

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

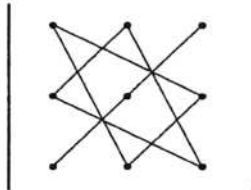
Броевите a_i, b_i, c_i ($i=1,2,3$) се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Елементите се распоредени во **три редици** (хоризонтално) и во **три колони** (вертикално). Елементите a_1, b_2, c_3 ја сочинуваат **главната дијагонала**, а a_3, b_2, c_1 ја сочинуваат **споредната дијагонала** на детерминантата.

Во изразот претставен со детерминантата од трет ред, првите три собирци претставуваат производи од по три елементи, кои лежат на главната дијагонала (a_1, b_2, c_3) и во темињата на триаголниците, чии основи се паралелни со главната дијагонала (a_2, b_3, c_1 и a_3, b_1, c_2), (црт. 1). Следниве три члена од равенството што се земени со негативен знак, претставуваат производи од по три елементи, кои лежат на



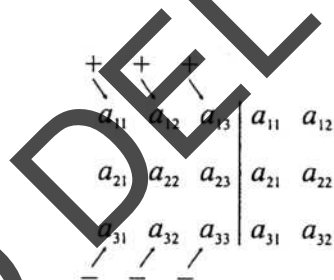
знак (+)

црт. 1



знак (-)

црт. 2



црт. 3

споредната дијагонала (a_3, b_2, c_1) и во темињата на триаголниците чии основи се паралелни со споредната дијагонала (a_2, b_1, c_3 и a_1, b_3, c_2), (црт. 2).

За пресметување на вредноста на детерминанта од трет ред го користиме и така-реченото **Сарусово правило**. Според ова правило, за да ја пресметаме вредноста на детерминантата, десно од неа ги допишуваме првата и втората колона, при што тие се четврта и петта колона на нова правоаголна шема. Потоа производите на елементите (по три), што лежат на главната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со позитивен знак, а производот на елементите (по три) што лежат на споредната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со негативен знак и овие шест производи ги собираме (црт. 3).

Пример 1. Вредноста на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

се пресметува на следниов начин

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 4 = 39. \blacklozenge$$



Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги вредностите на детерминантите:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

2. Реши ги равенките по непознатата x :

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Пресметај ги вредностите на детерминантите:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x^2 + 1 & xy & xz \\ xy & y^2 + 1 & yz \\ xz & yz & z^2 + 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix},$$

каде што x, y, a, b се произволно дадени реални броеви.

1.3.2. Развивање на детерминанта по елементите на дадена редица (колона)

Елементите на детерминанта кои се произволно дадени реални броеви (општи броеви) понекогаш е погодно да се запишуваат со една буква, ставајќи до неа два индекса што ќе ни го покажуваат редниот број на редицата и редниот број на колоната на кои им припаѓа дадениот елемент. По договор, првиот индекс секогаш ќе го означува редниот број на редицата, а вториот индекс – редниот број на колоната. Така, на пример, за $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ a_{ij} е елемент од i -та редица и j -та колона на детерминантата од трет ред:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Оваа детерминанта ќе ја сметаме за општа дадена детерминанта од трет ред и кратко ќе ја означуваме со Δ . За неа ќе воведеме два нови поима кои се однесуваат на сите детерминанти од трет ред. Тоа се поимите **минор** и **алгебарски комплемент** соодветни на даден елемент на детерминантата.

Дефиниција 1. За произволно избрани индекси i, j ($1 \leq i, j \leq 3$), ако ја прецртаме i -тата редица и j -тата колона на детерминанта од трет ред, преостанатите елементи формираат детерминанта од втор ред Δ_{ij} , која се нарекува **минор** на елементот a_{ij} .

Забелешка 1. Бидејќи секој елемент има свој минор, може да заклучиме дека една детерминанта од трет ред има девет различни минори. Еве три од нив кои одговараат на елементите a_{12} , a_{23} , a_{31} , соодветно:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \blacklozenge$$

Дефиниција 2. Алгебарски комплемент на елементот a_{ij} на детерминанта од трет ред се вика бројот $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, каде Δ_{ij} е минорот на елементот a_{ij} .

Забелешка 2. Алгебарските компленти на елементите a_{31} и a_{21} се соодветно:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \Delta_{31} = \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \Delta_{23} = -\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \blacklozenge$$

Вредноста на детерминантата од трет ред може да се добие со помош на елементите на една редица (колона) и нејзе соодветните минори, т.е. со **развивање на детерминантата** по елементите на избрана редица (колона) што се гледа од следнава теорема:

Теорема 1. Вредноста на детерминантата од трет ред е еднаква на збирот од производите на елементите на која било i -та редица (j -та колона) помножени со нивните соодветни алгебарски компленти; значи $\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}$, $1 \leq i \leq 3$ ($\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}$, $1 \leq j \leq 3$).

Доказ. Доказот ќе го изведеме за втората редица ($i=2$), односно ќе го докажеме равенството $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$. Од дефиницијата на детерминанта Δ од трет ред, имајќи ги предвид својствата на операциите собирање и множење на реални броеви, добиваме

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = \\ &= a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) = \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}. \end{aligned}$$

Случаите за $i=1,3$ и $j=1,2,3$ се докажуваат аналогно. ■

Горната теорема може да ја користиме за пресметување на вредноста на детерминанта од трет ред.

Пример 1. Развивајќи ја детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ по елементите на првата

редица добиваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 + 2 \cdot (-11) + 1 \cdot (-17) = -9. \spadesuit$$

Развивањето на детерминантата е корисно да се врши по онаа редица или колона која содржи нулти елементи.

Пример 2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 8 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = 8(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 56. \spadesuit$



Задачи за самостојна работа

1. Избери една детерминанта од трет ред и запиши ги сите нејзини минори и алгебрски комплементи.

2. Пресметај ги детерминантите со развивање по елементите на некоја од редиците:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix},$

б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$

в) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$

3. Пресметај ги детерминантите со развивање по елементите на некоја од колоните:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix},$

в) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix},$

каде x, y, z се произволно дадени реални броеви.

1.3.3. Својства на детерминантите од трет ред

Детерминантите од трет ред ги имаат следниве својства:

Својство 1. Детерминантата не ја менува вредноста, ако редиците се заменат со колони, запазувајќи го редниот број; значи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Навистина, да ја означиме со Δ детерминантата од левата страна на равенството, а со $\bar{\Delta}$ – детерминантата од десната страна на равенството. Ако детерминантата Δ ја

развиеме по елементите на првата редица, а $\bar{\Delta}$ – по елементите на првата колона, добиваме:
 $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ и $\bar{\Delta} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, од каде што следува $\Delta = \bar{\Delta}$. ■

Својство 2. При замена на местата на две редици (колони), вредноста на детерминантата го менува својот знак во спротивен.

На пример, ако $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, тогаш може да се смета дека $\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$ е добиена од детерминантата Δ со замена на местата на првата и на третата колона.

Развивајќи ја детерминантата $\bar{\Delta}$ по елементите на првата колона, добиваме:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \\ &= -a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Развивајќи ја сега детерминантата Δ по елементите на третата колона, добиваме

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \text{ Значи, } \bar{\Delta} = -\Delta.$$

Точноста на останатите случаи се проверува аналогно. ■

Својство 3. Детерминанта со две еднакви редици (колони) има вредност нула.

Навистина, ако во детерминантата Δ двете еднакви редици си ги заменат местата, вредноста на детерминантата останува иста, но според својството 2, вредноста на детерминантата мора да го промени знакот во спротивен. Затоа, мора да биде $\Delta = -\Delta$, или $2 \cdot \Delta = 0$. Оттука $\Delta = 0$. ■

Својство 4. Ако сите елементи на една редица (колона) се нулти, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

Навистина, со развивање на детерминантата Δ по редицата (колоната), во која сите елементи се нула, добиваме $\Delta = 0$. ■

Својство 5. Детерминанта се множи со број кога со тој број ќе се помножат сите елементи на една иста редица (колона).

На пример, ако елементите од првата колона имаат заеднички множител k , тогаш

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Навистина, со развивање на детерминантата Δ по елементите на првата колона добиваме: $\Delta = ka_{11}A_{11} + ka_{21}A_{21} + ka_{31}A_{31} = k(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})$. ■

Својство 6. Ако соодветните елементи на две редици (колони) се пропорционални, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

Навистина, без губење на општоста може да претпоставиме $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix}$.

Повикувајќи се прво на својството 5, а потоа на својството 3, добиваме

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Својство 7. Ако секој елемент на некоја редица (колона) на детерминантата Δ е збир од (конечен број) n собироци, тогаш Δ може да се претстави како збир $(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)$ од n детерминанти, во кои сите елементи со исклучок на елементите од односната редица (колона) се исти како во Δ . Во првата детерминанта – собирик (Δ_1) односната редица (колона) се состои од првите собироци, во втората се состои од вторите, итн. и во n -тата се состои од n -тите собироци.

На пример за да се утврди равенството

$$\begin{vmatrix} a_1 + s_1 + p_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + s_2 + p_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + s_3 + p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

доволно е почетната детерминанта да ја развиеме по елементите на првата колона. ■

Својство 8. Ако кон елементите на една редица (колона) на детерминантата се додадат соодветните елементи на друга редица (колона) претходно помножени со еден ист број k , тогаш не се менува вредноста на детерминантата.

На пример, со последователно користење на својството 7, на својството 5 и на својството 3, имаме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \blacksquare$$

Својство 9. Ако елементите на една редица (колона) на детерминантата се линеарни комбинации на соодветните елементи на другите две редици (колони), тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

На пример, со примена на својството 7 и на Својството 6, добиваме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11} + ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21} + ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31} + ya_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & ya_{32} \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0. \blacksquare$$

Својство 10. Збирот на производите на елементите на која било редица (колона) со соодветните алгебарски комплети на елементите од друга редица (колона) е еднаков на нула.

За проверка на ова својство, елементите на третата колона ќе ги помножиме соодветно со алгебарските комплети на елементите од првата колона, т.е. ќе покажеме дека важи равенството

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0.$$

Бидејќи алгебарските комплети на елементите од првата колона се формираат без употреба на елементите од таа колона, за кои било броеви x, y, z важи равенството

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = xA_{11} + yA_{21} + zA_{31}.$$

Посебно за $x = a_{12}, y = a_{22}, z = a_{32}$, добиваме $a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \blacksquare$



Задачи за самостојна работа

1. Користејќи ги својствата на детерминанта од трет ред, најди ги вредностите на следниве детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$

2. Детерминанта од облик $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$ се нарекува **горнотриаголна**. Покажи дека

вредноста на оваа детерминанта е еднаква на $a_{11}a_{22}a_{33}$.

3. Користејќи ги својствата на детерминанта, следните детерминанти доведи ги до горнотриаголна форма, а потоа пресметај ги нивните вредности:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

1.4. Систем од три линеарни равенки со три непознати

Детерминантите од трет ред, аналогно на детерминантите од втор ред, може да ги користиме за поедноставно запишување на сложени формули и услови, како и за решавање на системи од три линеарни равенки со три непознати.

1.4.1. Решение на системот и Крамерови формули

Нека е даден општ систем од три линеарни равенки со три непознати, x, y, z , во кој коефициентите на системот од практични причини се означени со иста буква и два индекси, a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, а слободните членови со b_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Коефициентите пред x, y, z образуваат **детерминанта на системот**, означена со Δ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Детерминантите:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

се нарекуваат **детерминанти на непознатите** x, y, z , соодветно.

Да се реши системот значи да се најдат вредности на непознатите, ако постојат, кои ги задоволуваат трите равенки на системот и претставуваат негово решение или да се утврди противречност на системот.

Да претпоставиме дека системот (1) има решение (x_0, y_0, z_0) . Тогаш равенствата

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 &= b_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 &= b_2 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 &= b_3 \end{aligned} \quad (1')$$

претставуваат идентитети.

Нека A_{11} , A_{21} , A_{31} се алгебарски компленти на елементите a_{11} , a_{21} и a_{31} , соодветно. Со множење на двете страни во првото равенство во (1') со A_{11} , на второто равенство со A_{21} , а третото со A_{31} , и со собирање на нивните соодветни страни, добиваме:

$$\begin{aligned} x_0(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + y_0(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) + z_0(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \end{aligned}$$

Согласно со својствата на детерминанта, имаме

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \Delta, \quad a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0, \quad a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0 \text{ и}$$

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_x. \text{ Со тоа покажавме дека } x_0 \cdot \Delta = \Delta_x.$$

Аналогно, множејќи ги равенствата на (1') соодветно со алгебарските компленти на елементите од втората колона на детерминантата Δ и потоа собирајќи ги нивните соодветни страни, доаѓаме до равенството $y_0 \cdot \Delta = \Delta_y$.

Слично, множејќи ги равенствата на (1') соодветно со алгебарските компленти на елементите од третата колона на Δ и собирајќи ги соодветните страни на добиените равенства, го добиваме и равенството $z_0 \cdot \Delta = \Delta_z$.

Според тоа, тројката броеви (x_0, y_0, z_0) , за којашто претпоставивме дека е решение на дадениот систем (1), претставува решение и на системот равенки:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases} \quad (2)$$

Да преминеме на утврдување на решенијата на дадениот систем линеарни равенки.

Случај I Нека $\Delta \neq 0$. Тогаш системот (2) има единствено решение така што мора да биде:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (3)$$

Од произволноста на решението (x_0, y_0, z_0) следува дека секое решение на (1) е еднакво на $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$ што значи дека и (1) има единствено решение. Тогаш (1) и (2) се еквивалентни системи.

Според тоа, точна е следнава **теорема на Крамер** за систем од три линеарни равенки со три непознати:

Теорема 1. Ако детерминантата Δ на системот (1) е различна од нула, тогаш тој систем има единствено решение, определено со формулите (3).

Формулите (3) се нарекуваат **Крамерови формули**, а решение добиено со примена на овие формули се вели дека е добиено со Крамерово правило.

Пример 1. Системот равенки
$$\begin{cases} -2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$$
 има единствено решение $(1, 1, 0)$, бидејќи

$\Delta = 4 \neq 0$, $\Delta_x = 4$, $\Delta_y = 4$ и $\Delta_z = 0$, така што $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$, $z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0$. ♦

Случај II Нека $\Delta = 0$.

II₁ Барем една од детерминантите $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ е различна од нула, на пример Δ_x . Ако системот (1) има решение (x_0, y_0, z_0) тогаш тоа би морало да биде решение и на системот (2), т.е. $0 = x_0 \cdot \Delta = \Delta_x \neq 0$, $y_0 \cdot \Delta = \Delta_y$, $z_0 \cdot \Delta = \Delta_z$. Првото равенство претставува противречност, што значи дека не е можно постоење на решение на (1), т.е. системот (1) е противречен.

Пример 2. Системот равенки
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$
 е противречен бидејќи $\Delta = 0$, а

$\Delta_x = 1 \neq 0$. ♦

II₂ Нека $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Ќе покажеме дека во овој случај системот равенки (1) има бескрајно многу решенија или е противречен.

Да ги испитаме сите случаи во кои четирите детерминанти на системот ќе имаат вредност нула.

✓ Очигледна ситуација настанува ако сите коефициенти и слободниот член на барем една равенка се еднакви на нула. Нека, на пример, без губење на општоста во (1) $a_{31} = a_{32} = a_{33} = b_3 = 0$. Тогаш третата равенка има облик

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$$

и е исполнета за секоја тројка реални броеви (x, y, z) . Притоа решение на (1) е секое решение на системот од првите две равенки

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

за којшто знаеме дека има бесконечно многу решенија или е противречен.

✓ Нека барем еден коефициент во барем една равенка на системот (1) е различен од нула, на пример, $a_{33} \neq 0$. Тогаш третата равенка може да се реши по z , т.е. да се запише во вид

$$z = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x - \frac{a_{32}}{a_{33}}y$$

и користејќи го ова, z може да се елиминира од првата и од втората равенка на (1). Притоа овие две равенки се сведуваат во облик

$$\begin{aligned} \left(a_{11} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{33}}\right)x + \left(a_{12} - a_{13} \frac{a_{32}}{a_{33}}\right)y &= b_1 - a_{13} \frac{b_3}{a_{33}} \\ \left(a_{21} - a_{23} \frac{a_{31}}{a_{33}}\right)x + \left(a_{22} - a_{23} \frac{a_{32}}{a_{33}}\right)y &= b_2 - a_{23} \frac{b_3}{a_{33}} \end{aligned}$$

и двете заедно претставуваат систем од две линеарни равенки со две непознати, кој може да се запише како што следува:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})y = b_1a_{33} - a_{13}b_3 \\ (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})x + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})y = b_2a_{33} - a_{23}b_3 \end{cases}$$

или користејќи детерминанти

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} b_1 & a_{13} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Детерминантата на овој систем се сведува на $a_{33}\Delta$ и од претпоставката $\Delta = 0$ следува дека $a_{33}\Delta = 0$. Оттука системот или е противречен и тогаш и (1) е противречен, или има бескрајно многу решенија (x, y) и за секое конкретно (x_0, y_0) тројката (x_0, y_0, z_0) , каде што $z_0 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_0 - \frac{a_{32}}{a_{33}}y_0$ претставува конкретно решение на (1), што значи дека (1) има бескрајно многу решенија.

Погорната дискусија може да се резимира во следнава теорема:

Теорема 2. Ако детерминантата на системот (1) е нула, тогаш тој систем има или бескрајно многу решенија или е противречен.

Пример 3. Вредноста на детерминантата на системот $\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2x + 6y + 2z = 4 \\ 3x + 9y + 3z = 6 \end{cases}$ е еднаква на

нула, што значи дека системот има бескрајно многу решенија или е противречен. Уочувајќи дека притоа системот може да се запише како $\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2(x + 3y + z) = 2 \cdot 2 \\ 3(x + 3y + z) = 2 \cdot 3 \end{cases}$ заклучуваме дека двете

последни равенки се излишни и тогаш решенијата на системот се решенијата равенката на $x + 3y + z = 2$ којашто има бескрајно многу решенија; тројката $x, y, z = 2 - x - 3y$ може да се смета за општо решение на системот за произволно избрани реални броеви x, y .

Пример 4. Системот $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 6x - 3y + 3z = 6 \\ 8x - 4y + 4z = 4 \end{cases}$ може да се запише во вид $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3(2x - y + z) = 3 \cdot 2 \\ 4(2x - y + z) = 4 \cdot 1 \end{cases}$

што е еквивалентен со $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$. Последниот систем очигледно е противречен, што

значи дека и дадениот систем е противречен. Притоа $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ бидејќи секоја од овие детерминанти има барем две пропорционални колони.

Пример 5. Непосредно за системот $\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ x + y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 10 \end{cases}$ се добива дека $\Delta = 0$, но веднаш

не може да се уочи дали тој е противречен или има бескрајно многу решенија. За да го утврдиме тоа може да поставиме на следниов начин. Бидејќи коефициентите на системот се различни од нула, избирајќи го, на пример, бројот (-1) пред z во првата равенка, таа може да се запише во еквивалентен вид $z = 3x + 2y - 8$, којшто може да се искористи за елиминирање на непознатата z од втората и во третата равенка на системот. Така се добива

систем од две равенки со две непознати $\begin{cases} 7x + 5y = 17 \\ 14x + 10y = 34 \end{cases}$ или, еквивалентно $\begin{cases} 7x + 5y = 17 \\ 2(7x + 5y) = 2 \cdot 17 \end{cases}$

којшто очигледно има бескрајно многу решенија. Како општо решение може да се земе, на пример

$$y = t, \quad x = \frac{17 - 5t}{7}, \quad z = -\frac{t + 5}{7}.$$



Задачи за самостојна работа

1. Реши ги системите линеарни равенки:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x + 2y - 3z = -6 \\ 4x - 5y - 2z = 12 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 1 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x - 3y + 4z = -2 \end{cases}$$

2. Докажи дека системот линеарни равенки $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$ за секоја вредност на параметарот a има единствено решение. Најди го тоа решение.

3. Испитај за кои вредности на параметарот a системот равенки $\begin{cases} 2x + ay + z = 8 \\ ax + 2y + z = 20 \\ x + y - 2z = -5 \end{cases}$

а) има бескрајно многу решенија; б) е противречен; в) има единствено решение.

4. При претпоставка дека системите имаат решение и притоа сите изрази во именителите се различни од нула, со воведување соодветна замена, најди ги решенијата:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{3}{x+y+z} - \frac{6}{y-2x} - \frac{1}{3z-y} = 1 \\ \frac{6}{x+y+x} - \frac{4}{y-2x} + \frac{1}{3z-y} = 3 \\ \frac{15}{x+y+z} + \frac{2}{y-2x} + \frac{3}{3z-y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{12}{x+y} - \frac{4}{x-2z} = 0 \\ \frac{6}{x+y} + \frac{5}{y+3z} = 2 \\ \frac{10}{y+3z} - \frac{6}{x-2z} = -1 \end{cases}$$

1.4.2. Гаусов метод

За нумеричко решавање на систем линеарни равенки со две непознати, познати се **методот на спротивни коефициенти** и **методот на замена**. И двата метода може да се применат и за системи линеарни равенки со три непознати, но практиката покажала дека во тој случај најефикасно е да се користи метод кој е комбинација на овие два метода, и се нарекува **Гаусов метод**, во чест на славниот германски математичар Карл Фридрих Гаус.

Нека е даден систем од три линеарни равенки со три променливи:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

✓ Може да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$, бидејќи во спротивно, првата равенка може да си го замени местото со втората или со третата така што коефициентот пред x да биде ненулта. Ако сите коефициенти пред x се еднакви на нула, тогаш би имале систем со две непознати.

✓ Првата равенка помножена со $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ја додаваме на втората равенка, а потоа помножена со $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ја додаваме на третата равенка. Тогаш коефициентите пред x во втората и во третата равенка стануваат нула, односно добиваме еквивалентен систем од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

✓ Ако $a'_{22} \neq 0$, тогаш втората равенка помножена со $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ ја додаваме на третата равенка. Со тоа добиваме еквивалентен систем на погорниот, но и на почетниот, од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a''_{33}z = b''_3 \end{cases} \quad (2a)$$

Ако $a'_{22} = 0$, но $a'_{32} \neq 0$, тогаш втората и третата равенка си ги менуваат своите места, па повторно можеме системот да го доведеме до обликот (2a).

Ако пак, $a'_{22} = a'_{32} = 0$, тогаш го имаме системот

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{23}z = b'_2 \\ a''_{33}z = b''_3 \end{cases}$$

па гледаме кој од коефициентите a'_{23} и a'_{33} е различен од нула. Ако на пример, $a'_{23} \neq 0$, втората равенка помножена со ердовтен коефициент ја додаваме на третата равенка и притоа добиваме еквивалентен систем од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{23}z = b'_2 \\ 0z = b'''_3 \end{cases} \quad (2б)$$

Ако пак $a'_{22} = a'_{23} = a'_{32} = a'_{33} = 0$, тогаш го имаме следниот еквивалентен систем

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ 0z = b'_2 \\ 0z = b'''_3 \end{cases} \quad (2в)$$

Во секој случај, системот (1) е еквивалентен со еден од системите (2a), (2б) и (2в).

✓ Решение на системот (2a):

Случај 1. Ако $a''_{33} \neq 0$, тогаш од третата равенка еднозначно се определува z , а потоа така добиената вредност на z се заменува во втората равенка. Бидејќи $a'_{22} \neq 0$, y

однозначно се определува од втората равенка, па така најдените y и z се заменуваат во првата равенка. Бидејќи $a'_{11} \neq 0$, и x се определува еднозначно. Значи, системот (1) има единствено решение.

Случај 2. Ако $a''_{33} = 0$, но $b''_3 \neq 0$, системот (2) е противречен.

Случај 3. Ако $a''_{33} = b''_3 = 0$, последната равенка на системот (2a) е излишна и ја отфрламе бидејќи се сведува на $0 = 0$. Земајќи произволна вредност t за z во втората равенка, добиваме еднозначно решение за y бидејќи $a'_{22} \neq 0$, $y = \frac{b_2 - a'_{23}t}{a'_{22}} = u$.

Потоа се враќаме на првата равенка од која се добива еднозначно $x = \frac{b_1 - a_{12}u - a_{13}t}{a_{11}}$; бидејќи $a_{11} \neq 0$. Значи во овој случај системот (1) има бескрајно многу решенија.

✓ Решение на системот (2б):

Случај 1. Ако $b'''_3 \neq 0$, тогаш системот е противречен.

Случај 2. Ако $b'''_3 = 0$, тогаш третата равенка ја отфрламе како излишна, од втората добиваме $z = \frac{b'_2}{a'_{23}} = z_0$ и избирајќи за y произволна вредност t од првата равенка наоѓаме

еднозначно решение за x , $x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}z_0}{a_{11}}$.

✓ Решение на системот (2в):

Случај 1. Ако $b'_2 \neq 0$ или $b'''_3 \neq 0$, тогаш системот е противречен.

Случај 2. Ако $b'_2 = b'''_3 = 0$, тогаш втората и третата равенка се излишни. Во првата равенка земаме произволни вредности t и u за y и z , соодветно а потоа x се определува еднозначно бидејќи $a_{11} \neq 0$, $x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}u}{a_{11}}$.

Не е тешко да се насети дека погорниот тек на одвивање на пресметувањата (алгоритам) на Гаусовиот метод не е единствен. Изборот на алгоритмот често го вршме користејќи ја спецификата на системот.

Пример 1. За да се реши системот
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$
 забележуваме дека тој е

еквивалентен со
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$
 којшто со примена на опишаниот алгоритам од своја

страна е еквивалентен ($\Leftrightarrow$) со
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \\ 3y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \\ 4z = -4 \end{cases}.$$

Од последниот систем последователно добиваме $z = -1$, $y = 0$, $x = 1$. Притоа, ги променивме местата на првите две равенки, за да добиеме $a_{11} = 1$, и да го избегнеме делењето со a_{11} . ♦

Пример 2. Решавањето на системот
$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases}$$
 се одвива како што следува

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ 2y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ 0y + 0z = 4 \end{cases}$$

Третата равенка во последниот систем е противречна и затоа разгледуваниот систем е противречен. ♦

Пример 3. Применувајќи го Гаусовиот метод за системот
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + 9z = 12 \end{cases}$$
 добиваме

еквивалентни системи
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 8z = 8 \\ 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 8z = 8 \\ 8z = 8 \end{cases}$$
 Од последната равенка на последниот

систем добиваме $z = 1$. Потоа, избирајќи произволна вредност $y = t$ за x добиваме $x = 1 - t$. Значи, системот има бескрајно многу решенија: $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 1$, за секој реален број t . ♦



Задачи за самостојна работа

Со помош на Гаусовиот метод реши ги следните системи:

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases} & 2. \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases} \end{array}$$

$$3. \begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 1 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = -4 \\ 6x - 2y + 3z = -1 \\ 5x - 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 \\ 3x + 4y + 2z = -10 \\ 2x - 2y + 5z = 1 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x + 2y - 3z = -6 \\ 4x - 5y - 2z = 12 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - z = 11 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

1.5. Хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати

Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

во кој слободните членови во сите равенки се еднакви на нула, се вика **хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати**.

Очигледно е дека секој хомоген линеарен систем (1) секогаш има таканаречено **нулто** или **тривијално решение** $x=0, y=0, z=0$. Затоа е од интерес да испитаме во кои случаи хомогениот систем линеарни равенки (1) има и ненулти решенија.

Ќе покажеме дека важи следнава теорема:

Теорема 1. Хомогениот систем (1) од три линеарни равенки со три непознати има ненулти решенија, ако и само ако детерминантата на системот (1) е еднаква на нула; $\Delta = 0$.

Доказ. Нека системот (1) има ненулто решение (x_1, y_1, z_1) . Ако детерминантата на системот (1) е различна од нула, односно ако $\Delta \neq 0$, тогаш согласно со теоремата на Крамер системот (1) има единствено решение и тоа мора да биде нултото решение. Според тоа, при $\Delta \neq 0$ доаѓаме до противречност со претпоставката дека системот (1) има ненулто решение. Значи, $\Delta = 0$.

Обратно, нека $\Delta = 0$. Во тој случај, бидејќи системот (1) не е противречен (има нулто решение), може да заклучиме дека системот (1) има бесконечно многу ненулти решенија. Не е тешко да се уочи, дека заедно со секое ненулто решение x_0, y_0, z_0 на системот (1), за секој реален број t и тројката tx_0, ty_0, tz_0 претставува решение на (1). ■

Се поставува прашањето при услов $\Delta = 0$ како да дојдеме до ненултите решенија на хомогениот систем (1).

Секако, барем еден коефициент на системот (1) е различен од нула (во спротивно секоја тројка реални броеви претставува решение за системот). Без губење на општоста може да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$. Тогаш првата равенка може да се запише во вид

$x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}y - \frac{a_{13}}{a_{11}}z$ и користејќи го ова равенство, x може да се елиминира од втората и од третата равенка и така да се добие систем од две линеарни равенки со две непознати y и z ,

$$\begin{cases} \left(a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)y + \left(a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)z = 0 \\ \left(a_{32} - a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}}\right)y + \left(a_{33} - a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)z = 0 \end{cases}$$

којшто се сведува во облик

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} z = 0 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} z = 0 \end{cases}$$

или, кратко

$$\begin{cases} \Delta_{33}y + \Delta_{32}z = 0 \\ \Delta_{23}y + \Delta_{22}z = 0 \end{cases}$$

Ако сите коефициенти на последниот систем (детерминантите $\Delta_{33}, \Delta_{32}, \Delta_{23}, \Delta_{22}$) се еднакви на нула, тогаш за произволно избрани реални броеви t и u , од кои барем еден е ненулта, тројката $x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}t - \frac{a_{13}}{a_{11}}u$, $y = t$, $z = u$ претставува ненулта решение на почетниот систем (1).

Ако барем еден коефициент, на пример $\Delta_{33} \neq 0$, тогаш за секоја ненулта вредност u на z , за $y_0 = -\frac{\Delta_{32}}{\Delta_{33}}u$, $x_0 = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\Delta_{32}}{\Delta_{33}}u - \frac{a_{13}}{a_{11}}u$, x_0, y_0, u претставува нетривијално решение на системот (1).

Пример 1. Системот линеарни равенки $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$ нема ненулта решение бидејќи

$$\Delta = 2 \neq 0. \blacklozenge$$

Пример 2. Системот линеарни равенки $\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ има бескрајно многу решенија

бидејќи $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. За да ги најдеме ненултите решенија постапуваме на следниов

начин: Од втората равенка на системот се добива $z = -2x - y$ и со замена на z со изразот $-2x - y$ првата и третата равенка се сведуваат на равенките $2x + y = 0$ и $-2x - y = 0$. Оттука за произволно избран реален број t тројката $x = t$, $y = -2t$, $z = 0$ претставува решение на системот. $\blacklozenge$



Задачи за самостојна работа

1. Најди ги сите решенија на системот хомогени линеарни равенки:

$$a) \begin{cases} 3x + 7y + 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 7y - z = 0 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

2. За кои вредности на параметарот a , системот хомогени линеарни равенки:

$$\begin{cases} x + 3 + az = 0 \\ 4x + 5y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

ќе има ненулти решенија.

3. Докажи дека за произволни вредности на a , b и c , системот $\begin{cases} ay + bz = 0 \\ -ax + cz = 0 \\ -bx - cy = 0 \end{cases}$ има

бесконечно многу решенија.

4. За која вредност на параметарот a , системот $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$ има барем две

решенија?

Задачи за вежбање

1. Пресметај ја вредноста на детерминантата:

$$a) \begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ -\frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

2. Решете системот линеарни равенки:

$$a) \begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} 4x + 7y = -13 \\ 5x + 8y = -14 \end{cases}.$$

3. Докажи дека ако a , b и c се реални броеви, тогаш равенката $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$ има реални корени.

4. Докажи го равенството
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 + a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 + a \\ 1 & a^3 & a^2 + a \end{vmatrix} = 0.$$

5. Докажи го идентитетот
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & \frac{1}{2}(y_1 + y_2) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2) & \frac{1}{2}(y_1 - y_2) & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

6. Со примена на својствата на детерминанта пресметај
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s+1 & s+2 & s+3 \\ s+4 & s+5 & s+7 \end{vmatrix}.$$

7. Реши ја неравенката
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & x+2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & x & -3 \end{vmatrix} < 0.$$

8. За која вредност на a , системот
$$\begin{cases} 3x + 5y = 5 \\ 2x - y = a \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$
 има решение?

9. Реши ги следните системи равенки со три непознати:

а)
$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + z = b \\ -x + y + z = c \end{cases};$$

б)
$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases}.$$

10. Реши го системот равенки:
$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}.$$

11. Со помош на Гаусовиот метод реши ги системите равенки:

а)
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases};$$

б)
$$\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 3x - 4y = 11 \\ 2x - z = 11 \end{cases}.$$

12. Ако даден број се подели со збирот на неговите цифри, се добива количник 22. Ако цифрите на десетките и на единиците си ги заменат местата, ќе се добие број што е за 18 помал од дадениот, а ако цифрите на стотките и на десетките си ги заменат местата, ќе се добие број за 360 поголем од дадениот број. Кој е тој број?

13. Најди ги должините на страните на еден триаголник, ако сумите на паровите од неговите страни се 8cm, 9cm и 11cm.

14. Бројот a претстави го како збир од три броја, така што првиот е за m (единици) поголем од вториот, а n пати помал од третиот број.

15. Во кој случај системот равенки
$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ ax - by = ab \end{cases}$$
 има решение?

16. Докажи дека функцијата $\frac{ax+b}{cx+d}$ е константна (прима иста вредност за секое x за кое $cx+d \neq 0$) ако и само ако $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

17. Реши го системот равенки
$$\begin{cases} 2ax - 3by + cz = 0 \\ 3ax - 6by + 5cz = 2abc \\ 5ax - 4by + 2cz = 3abc \end{cases}$$
 за произволно дадени реални броеви a, b, c .

Користејќи ги својствата на детерминанта, докажи ги идентитетите (18-20):

$$18. \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b). \quad 19. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b).$$

PROSVETNO DELO

Во математика, во физиката и во другите природни науки се среќаваме се величини кои се напълно определени со својот мерен број, при избрана единица мера. Такви се величините: должина на отсечка, плоштина на геометриска фигура, маса на физичко тело, температура, време итн. Овие величини се викаат **скаларни величини** или накусо, **скалари**.

Покрај скаларните величини среќаваме и такви величини кои не се напълно определени само со својот мерен број. Такви се на пример, величините: сила, брзина, забрзување, јачина на магнетно поле и други. За нивно определување покрај мерниот број треба да ги знаеме и нивниот правец и насока. Навистина, ако речеме: ветерот се движи со брзина од 30 km/h , само со тој податок неговата брзина не е целосно определена. Бидејќи таа се карактеризира уште и со својата насока: север-југ, југ-север, исток-запад или некоја друга насока. Овие величини се установено да се викаат **векторски величини** или накусо, **вектори**.

Со скаларните величини, бидејќи тие се напълно определени само со реалните броеви, ќе сметаме како со реални броеви. Меѓутоа, операциите со векторските величини ќе ги дефинираме посебно. Операциите над векторските величини ќе имаат аналогни својства со својствата на соодветните операции над реалните броеви. Целот од математиката што ги изучува векторите, нивните својства и операциите над нив се вика **векторска алгебра**.

2.1. Основни поими

Нека (A, B) е подреден пар точки во просторот. Точката A ја нарекуваме почетна, а точката B крајна точка на подредениот пар. **Правецот** на парот (A, B) е определен со правата AB , т.е. правата којашто минува низ точките A и B . Два пара (A, B) и (C, D) се паралелни ако нивните правци се паралелни. Да забележиме дека во тој случај точките A, B, C и D лежат во иста рамнина. Два паралелни пара (A, B) и (C, D) имаат иста **насока** ако точките B и D се на иста страна од правата AC , додека тие имаат спротивни насоки ако точките B и D се на различни страни од правата AC . Ако точките A и C се совпаѓаат, тогаш дадените парови имаат иста насока ако точките B и D од правата AB се на иста страна од точката A , додека тие имаат различни насоки ако точките B и D се на различни страни од точката A . Ако точките A, B, C и D се колинеарни тогаш паровите (A, B) и (C, D) имаат иста **насока** ако постои пар точки (E, F) (точките E и F не лежат на правата AB), така што паровите (E, F) и (A, B) како и паровите (E, F) и (C, D) имаат иста **насока**.

Подреден пар (A, B) кај којшто почетната и крајната точка се совпаѓаат, $A = B$, се нарекува **нула-пар**. Правецот и насоката на нула-парот не се определени. Затоа нула-парот може да се смета паралелен и со иста насока со секој подреден пар точки.

Два подредени пара (A, B) и (C, D) се **еквиолентни** ако и само ако имаат иста насока и $\overline{AB} = \overline{CD}$, и пишуваме $(A, B) \sim (C, D)$. Да забележиме дека секои два нула-пара се еквиолентни. Дефинираната реалација во множеството од подредени парови точки во просторот е еквиваленција, односно таа е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Така множеството од подредени парови точки е разбиено на дисјунктни класи од меѓусебе еквиолентни парови. Сега може да ја усвоиме следнава дефиниција:

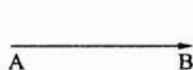
Дефиниција 1. Една класа од меѓусебно еквивалентни подредени парови точки се нарекува **вектор**.

Согласно со дефиницијата, ако е даден произволен вектор, тогаш секоја точка во просторот е почетна точка на еден пар точки кој припаѓа на дадениот вектор. Според тоа, секој вектор претставува бесконечно множество од подредени парови точки кои се паралелни, имаат иста насока и определуваат складни отсечки.

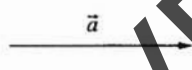
Векторите дефинирани како класа еквивалентни подредени парови точки се нарекуваат уште и **слободни вектори**, а подредените парови точки **врсани вектори** или вектори врсани за точка. За врсан вектор (A, B) во иднина ќе ја користиме ознаката (AB) . Слободните вектори ќе ги означуваме со малите латинични букви со стрелка: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Покрај оваа ознака слободниот вектор $\vec{a}$ којшто го содржи врсаниот вектор (AB) ќе го означуваме со $\overrightarrow{AB}$. Значи ако $\vec{a} = \{(AB), (CD), \dots\}$ тогаш $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \dots$. Векторот чиј елементи се сите нула-парови се вика **нулти вектор** и се означува со $\vec{0}$.

Правец и насока на слободен вектор е правецот и насоката на кој било врсан вектор кој припаѓа на дадениот слободен вектор. Два вектори со ист правец се нарекуваат **колинеарни вектори**.

При дадена единица должина, мерниот број на отсечката AB се вика модул или должина на врсаниот вектор (AB) . **Модул или должина** на слободен вектор $\vec{a}$ е модулот на кој било врсан вектор којшто е елемент на $\vec{a}$ и се означува со $|\vec{a}|$. Слободен (врсан) вектор со должина 1 се вика **единечен слободен (врсан) вектор**.

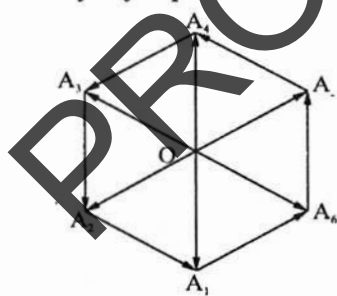


црт. 1



црт. 2

Заради полесно разбирање на поимите поврзани со вектори, векторите вообичаено се претставуваат графички. Во таа смисла, врсан вектор (AB) се претставува со отсечка, чии крајни точки се A и B , која завршува со стрелка во точката B (црт. 1). Бидејќи сите елементи на даден слободен вектор $\vec{a}$ (бесконечно многу врсани вектори) не може да ги претставиме графички, слободниот вектор ќе го претставуваме со еден од врсаните вектори кој му припаѓа, ставајќи ја притоа ознаката на слободниот вектор (црт. 2).



црт. 3

Пример 1. Во правилниот шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ со центар во точката O (црт. 3) се претставени векторите $\overrightarrow{OA_i}$, $i=1,2,\dots,6$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $i=1,2,\dots,5$, и $\overrightarrow{A_6A_1}$. Меѓу себе еднакви се следниве парови вектори:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= \overrightarrow{A_5A_6}, & \overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{A_6A_1}, \\ \overrightarrow{OA_3} &= \overrightarrow{A_1A_2}, & \overrightarrow{OA_4} &= \overrightarrow{A_2A_3}, \\ \overrightarrow{OA_5} &= \overrightarrow{A_3A_4}, & \overrightarrow{OA_6} &= \overrightarrow{A_4A_5}. \end{aligned} \spadesuit$$



Задачи за самостојна работа

1. Ако отсечките AB и CD не лежат на една права, тогаш $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ако и само ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм. Докажи!

2. Докажи ја импликацијата: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

3. Нека O, A и B се три различни точки. Ако точката O е средина на отсечката AB , тогаш $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$. Докажи!

4. Нека ABC е даден триаголник и нека M, N и P се средини на страните AB, BC и CA , соодветно. Точно ли е дека:

а) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$, б) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BN}$, в) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN}$, г) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$, д) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$?

5. Нека е даден квадрат $ABCD$ чиито дијагонали се сечат во точката O и нека $(AB) \in \vec{a}$, $(BO) \in \vec{b}$, $(DA) \in \vec{c}$, $(CD) \in \vec{d}$. Кои од следните искази се точни:

а) $(DC) \in \vec{a}$, б) $(CD) \in \vec{a}$, в) $(OD) \in \vec{b}$, г) $(BC) \in \vec{c}$, д) $(CB) \in \vec{c}$, е) $(AO) \in \vec{d}$, е) $(AD) \in \vec{c}$?

6. Нека е даден правоаголник $ABCD$ чиито дијагонали се сечат во точката O . Кои од векторите: $(AB) \in \vec{a}$, $(BC) \in \vec{b}$, $(DC) \in \vec{c}$, $(DA) \in \vec{d}$, $(AO) \in \vec{m}$, $(BO) \in \vec{n}$, $(OC) \in \vec{p}$, $(DO) \in \vec{q}$ се меѓу себе еднакви?

2.2. Собирање на вектори

Во множеството слободни вектори ќе дефинираме операција собирање на вектори со својства аналогни на својствата на операцијата собирање на реални броеви.

2.2.1 Дефиниција на операцијата собирање на вектори

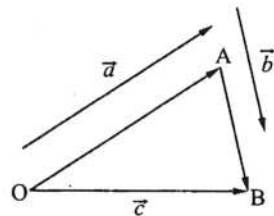
Нека O, A и B се три произволни точки во просторот. Врзаниот вектор (OB) се нарекува збир на врзаните вектори (OA) и (AB) и пишуваме $(OB) = (OA) + (AB)$.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (црт. 1). За да го определиме нивниот збир, постапуваме на следниов начин:

✓ Избираме произволна точка O во просторот.

✓ Го конструираме векторот $(OA) \in \vec{a}$.

✓ Земајќи ја точката A како почетна, го конструираме векторот $(AB) \in \vec{b}$.

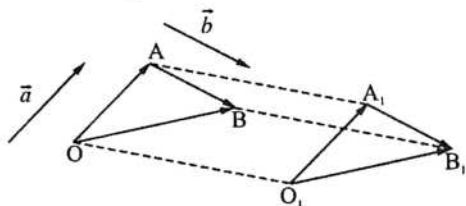


црт. 1

Векторот $\vec{c}$ којшто го содржи врзаниот вектор (OB) се нарекува **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, наречени **собирачи**, и пишуваме

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

За да покажеме дека операцијата собирање вектори е добро дефинирана ќе покажеме дека векторот $\vec{c}$ е независен од изборот на точката O. За таа цел ќе ја повториме

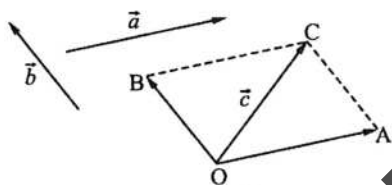


црт. 2

конструкцијата поаѓајќи од која било друга точка O_1 , различна од точката O (црт. 2). Тогаш $(O_1A_1) \in \vec{a}$, $(A_1B_1) \in \vec{b}$ и збирот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторот $\vec{c}_1$ којшто го содржи врзаниот вектор (O_1B_1) . Бидејќи четириаголникот OO_1B_1V е паралелограм, добиваме дека $(OB) \sim (O_1B_1)$, односно $c = c_1$.

Гореизложената постапка за собирање на два вектори се вика **правило на триаголник**. Во продолжение ќе го проучиме **правилото на паралелограм** за собирање на два вектори.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. За да го определиме нивниот збир постапуваме на следниов начин:



црт. 3

✓ Избираме произволна точка O во просторот.

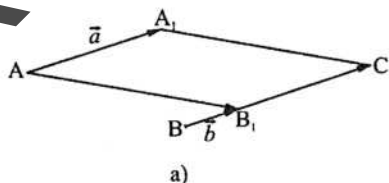
✓ Ги конструираме векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$.

✓ Низ точката A конструираме права паралелна со правата OB, а низ точката B конструираме права паралелна со правата OA. Пресечната точка на така добиените прави ја означуваме со C (црт. 3).

Векторот $\vec{c}$ којшто го содржи врзаниот вектор (OC) се нарекува **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вообичаено се нарекуваат **компоненти**, а векторот $\vec{c}$ се нарекува **резултантен вектор** или **резултанта**.

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш можни се следниве два случаја (црт. 4).

а) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока. Во тој случај збирот $\vec{a} + \vec{b}$ има правец и насока како векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а за модулот важи равенството: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.



а)



б)

$$(AA_1) \in \vec{a}, (BB_1) \in \vec{b}, (BC) \in \vec{a} + \vec{b}$$

$$(AA_1) \in \vec{a}, (A_1B) \in \vec{b}, (AB) \in \vec{a} + \vec{b}$$

црт. 4

б) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат спротивни насоки. Во тој случај збирот $\vec{a} + \vec{b}$ има правец како и векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, насока на векторот со поголем модул, а за модулот важи равенството: $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$.

Два колинеарни вектори со еднакви модули, а спротивни насоки се нарекуваат **спротивни** вектори. Спротивниот вектор на векторот $\vec{a}$ ќе го означуваме со $-\vec{a}$. Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ се спротивни, за произволно избрани точки A и B. Непосредно од дефиницијата за спротивен вектор следуваат равенствата: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ и $-(-\vec{a}) = \vec{a}$, за секој вектор $\vec{a}$.



Задачи за самостојна работа

- Дадени се два произволни ненулни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај ги векторите:
 - $\vec{a} + \vec{b}$;
 - $\vec{a} + (-\vec{b})$;
 - $\vec{b} + (-\vec{a})$;
 - $(-\vec{a}) + (-\vec{b})$;
 - $-(\vec{a} + \vec{b})$.
- Докажи дека за кои било три точки A, B и C важи равенството $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
- Нека се дадени два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни. Конструирај го векторот $\vec{c}$, така што $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{0}$.
- Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два вектори со спротивни насоки. Одреди ја насоката и должината на збирот $\vec{a} + \vec{b}$, ако
 - $|\vec{a}| > |\vec{b}|$;
 - $|\vec{a}| < |\vec{b}|$;
 - $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
- Нека ABCDE е паралелограм. Ако $(AC) \in \vec{a}$, $(DC) \in \vec{b}$, $(BC) \in \vec{c}$, најди по еден претставник на векторите
 - $\vec{a} + (-\vec{c})$;
 - $\vec{a} + (-\vec{b})$;
 - $\vec{b} + (-\vec{a})$;
 - $\vec{c} + (-\vec{b})$.

2.2.2. Својства на операцијата собирање на вектори

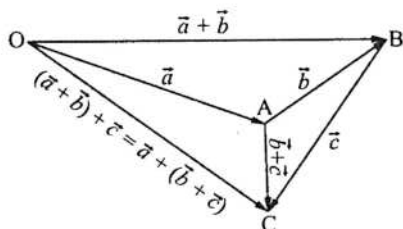
Да го означиме со V множеството слободни вектори. Ќе докажеме некои својства на операцијата собирање на вектори кои произлегуваат од самата дефиниција.

Теорема 1. Нека V е множеството слободни вектори. Точни се следниве тврдења:

- За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{b} \in V$.
- За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- За секој вектор $\vec{a} \in V$ и за нултиот вектор $\vec{0}$ важи $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- Секој вектор $\vec{a} \in V$ има (единствен) спротивен вектор $-\vec{a} \in V$, така што $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.
- За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Доказ. (i) следува непосредно од дефиницијата на операцијата собирање на вектори и го искажува фактот дека збир од два вектори е вектор.

(ii) го искажува фактот дека операцијата собирање на вектори е асоцијативна. Нека $(OA) \in \vec{a}$, $(AB) \in \vec{b}$ и $(BC) \in \vec{c}$ (црт. 1). Тогаш од правилото на триаголник, имаме



црт. 1

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}, \text{ и}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

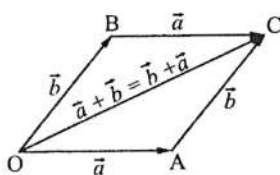
(iii) Ако $(AB) \in \vec{a}$, тогаш

$$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \text{ и}$$

$$\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

од каде што следува дека нултниот вектор е неутрален елемент во однос на операцијата собирање на вектори.

(iv) Како што веќе спомнавме, за кој било вектор $\vec{a}$ нему спротивниот вектор $-\vec{a}$ ги има својствата $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ и $-(-\vec{a}) = \vec{a}$. Ова својство го искажува фактот дека секој слободен вектор има инверзен вектор во однос на операцијата собирање на вектори.



црт. 2

(v) Нека $(OA), (BC) \in \vec{a}$ и $(OB), (AC) \in \vec{b}$ (црт. 2). Тогаш

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}, \text{ и}$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

Според тоа, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, односно собирањето на вектори е комутативно. ■

Од теоремата непосредно следува дека множеството V во однос на операцијата собирање на вектори е комутативна група. Асоцијативноста и комутативноста дозволуваат при собирањето на вектори:

- ✓ назначените операции да ги изведуваме по произволен редослед,
- ✓ повеќе вектори да се заменат со својот збир или еден вектор да се замени со неговиот збир.

Пример 1. За секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a})$.

Навистина, од асоцијативноста и од комутативноста на операцијата собирање на вектори, имаме $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a})$. ♦

Со повеќекратна примена на правилото на триаголник може да се најде векторот-збир на секој конечен број вектори.

Пример 2. За да го најдеме збирот на векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ и $\vec{a}_5$, прво ќе ги собереме векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Нека O е произволна точка и нека $(OA_1) \in \vec{a}_1$ и $(A_1A_2) \in \vec{a}_2$ (црт. 3). Тогаш векторот $\overrightarrow{OA_2}$ е збир на векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, т.е. $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Ако

од крајната точка A_2 на векторот (OA_2) , земена како почетна точка, го конструираме векторот $(A_2A_3) \in \vec{a_3}$ имаме $\vec{OA_3} = (\vec{a_1} + \vec{a_2}) + \vec{a_3}$. Понатаму, ако од точката A_3 го конструираме векторот $(A_3A_4) \in \vec{a_4}$ имаме $\vec{OA_4} = ((\vec{a_1} + \vec{a_2}) + \vec{a_3}) + \vec{a_4}$. На крај го конструираме векторот $(A_4A_5) \in \vec{a_5}$ и го добиваме збирот на векторите $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{a_4}$ и $\vec{a_5}$:

$$\vec{OA_5} = (((\vec{a_1} + \vec{a_2}) + \vec{a_3}) + \vec{a_4}) + \vec{a_5}.$$

Согласно со асоцијативноста и со комутативноста на операцијата собирање вектори погорниот збир ќе се добие и при секој друг редослед на собирањите. Затоа, тој може да се запише како $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} + \vec{a_4} + \vec{a_5}$ и го претставува векторот (OA_5) , кој ја затвора полигоналната линија $OA_1A_2A_3A_4A_5$, конструирана со помош на векторите $(OA_1) \in \vec{a_1}, (A_1A_2) \in \vec{a_2}, (A_2A_3) \in \vec{a_3}, (A_3A_4) \in \vec{a_4}$ и $(A_4A_5) \in \vec{a_5}$.

На сличен начин, може да го најдеме збирот на конечно многу вектори $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$. Постапката со која се определува збирот на повеќе вектори се вика **правило на многуаголник**.

Пример 3. Ќе покажеме дека четриаголникот ABCD е паралелограм, ако и само ако за произволна точка O важи равенството $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$.

Прво да претпоставуваме дека четриаголникот ABCD е паралелограм и O е избрана точка (црт. 4). Тогаш важи:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}, \quad \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OD} \text{ и } \vec{AB} = -\vec{CD}, \text{ т.е. } \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}. \text{ Понатаму,}$$

$$(\vec{OA} + \vec{AB}) + (\vec{OC} + \vec{CD}) = \vec{OB} + \vec{OD},$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} + (\vec{AB} + \vec{CD}) = \vec{OB} + \vec{OD},$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}.$$

Обратно, претпоставуваме дека $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$. Од

$$\vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB} \text{ и } \vec{OD} + \vec{DA} = \vec{OA},$$

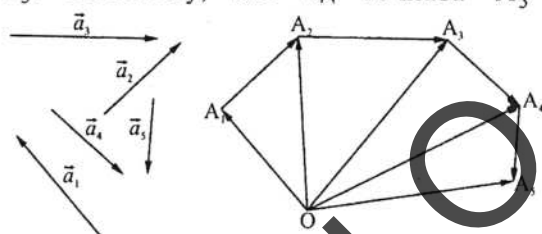
следува

$$\vec{OA} + (\vec{OC} + \vec{CB}) = (\vec{OD} + \vec{DA}) + \vec{OB},$$

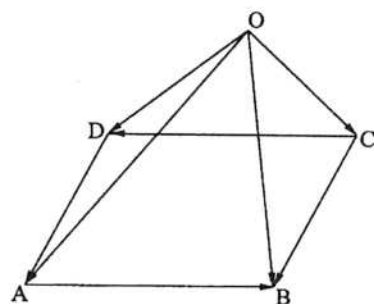
односно

$$\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{DA}. \text{ Тогаш } \vec{CB} = \vec{DA},$$

што значи дека четриаголникот ABCD е паралелограм. ♦



црт. 3



црт. 4



Задачи за самостојна работа

1. Покажи дека за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V$ важи $(\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})) + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d})$.

2. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник со центар во точката O . Најди го збирот на векторите: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OF}$.

3. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако неговите дијагонали се преполовуваат.

4. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S е пресекот на неговите дијагонали. Упрости ги изразите:

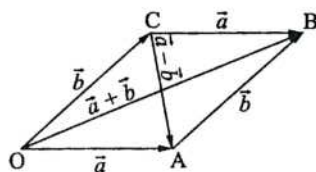
а) $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{SA}) + \overrightarrow{SC}$; б) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DS}) + \overrightarrow{SA}$; в) $\overrightarrow{DS} + (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC})$; г) $(\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB})$.

5. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Изрази ги векторите $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{FE}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

2.3. Одземање на вектори

Во множеството на слободни вектори ќе воведеме нова операција која е инверзна на операцијата собирање на вектори. Аналогно, како кај реалните броеви, инверзната операција на операцијата собирање, ќе ја викаме **одземање**.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (црт. 1). **Разлика** на векторот $\vec{a}$ со векторот $\vec{b}$ се нарекува векторот $\vec{c}$ така што $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, и се пишува



црт. 1

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Векторот $\vec{a}$ е **намаленик**, а векторот $\vec{b}$ е **намалител**.

Од црт. 1 се гледа дека од паралелограмот $OABC$ може да се определи и збирот $\vec{a} + \vec{b}$ и разликата $\vec{a} - \vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Навистина, од $\vec{b} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$ добиваме дека $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CA}$.

Операцијата одземање на вектори е добро дефинирана, т.е. векторот $\vec{c}$ е еднозначно определен. Навистина, ако претпоставиме дека постојат два вектори $\vec{c}$ и $\vec{c}_1$ коишто се еднакви на разликата на векторот $\vec{a}$ со векторот $\vec{b}$, тогаш $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}_1$, и оттука $\vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}_1$. Бидејќи множеството слободни вектори е група во однос на операцијата собирање, имаме

$$(\vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{b}) = (\vec{b} + \vec{c}_1) + (-\vec{b})$$

$$(\vec{c} + \vec{b}) + (-\vec{b}) = (\vec{c}_1 + \vec{b}) + (-\vec{b}) \quad (\text{комутативност})$$

$$\vec{c} + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \vec{c}_1 + (\vec{b} + (-\vec{b})) \quad (\text{асоцијативност})$$

$$\vec{c} + \vec{0} = \vec{c}_1 + \vec{0} \quad (\text{збирот на спротивни вектори е } \vec{0})$$

$$\vec{c} = \vec{c}_1 \quad (\vec{0} \text{ е неутрален елемент во однос на собирањето}).$$

Операцијата одземање на вектори ќе ја доведеме во врска со операцијата собирање.

Теорема 1. Разликата на вектор $\vec{a}$ со вектор $\vec{b}$ е еднаква на збирот на векторот $\vec{a}$ со векторот $-\vec{b}$ (спротивниот вектор на векторот $\vec{b}$).

Доказ. Поради асоцијативноста и комутативноста на операцијата собирање, имаме

$$\vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{b})) = \vec{b} + ((-\vec{b}) + \vec{a}) = (\vec{b} + (-\vec{b})) + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}. \text{ Оттука следува } \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}. \blacksquare$$

Од теорема 1 следува дека во една векторска равенка може одредени членови од равенката да ги префрламе од едната на другата страна, без да се наруши равенството, исто како кај равенките со реални броеви.

Пример 1. Од векторската равенка $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ со примена на теорема 1 ги добиваме следниве еквивалентни равенки: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d} - \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} - \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{d} - \vec{a}$, $\vec{a} = \vec{d} - \vec{b} - \vec{c}$. ♦

Пример 2. Во правилен шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ векторите $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$ и $\overrightarrow{A_5A_6}$ може да се изразат преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{A_6A_1}$.

Навистина, непосредно заклучуваме дека $\overrightarrow{A_4A_5} = -\overrightarrow{A_1A_2} = -\vec{a}$ и $\overrightarrow{A_3A_4} = -\overrightarrow{A_6A_1} = -\vec{b}$.

Поради $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_6A_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, од триаголникот OA_2A_3 следува дека $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{OA_3}$ (правило на триаголник), односно $\vec{b} + \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}$. Оттука $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a} - \vec{b}$.

На сличен начин од триаголникот OA_3A_4 следува $\overrightarrow{A_3A_4} = \vec{b} - \vec{a}$. ♦



Задачи за самостојна работа

- Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај ги векторите:
 - $\vec{a} + \vec{b}$;
 - $\vec{a} - \vec{b}$;
 - $\vec{b} - \vec{a}$;
 - $-\vec{a} - \vec{b}$.
- Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални вектори и $|\vec{a}| = 6$ и $|\vec{b}| = 8$, пресметај ги $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.
- Кои услови треба да ги исполнуваат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за да важи:
 - $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;
 - $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$;
 - $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$?
- Реш ги векторските равенки:
 - $\vec{a} + \vec{x} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$;
 - $\vec{a} - \vec{x} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$.
- Нека ABCD е даден паралелограм и нека S е пресекот на неговите дијагонали. Изрази ги векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$.

2.4. Множење на вектор со скалар

Нека $\mathbb{R}$ е множеството реални броеви. Неговите елементи вообичаено се нарекуваат скалари. Во множеството слободни вектори ќе дефинираме надворешна бинарна операција наречена множење на вектор со скалар.

Нека $\vec{a}$ е даден вектор и p даден скалар.

Производ на векторот $\vec{a}$ со скаларот p се нарекува векторот $\vec{b} = p\vec{a}$ кој е колинеарен со векторот $\vec{a}$, има должина $|p||\vec{a}|$, иста насока како векторот $\vec{a}$, ако $p > 0$, а спротивна насока ако $p < 0$. Ако $p = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, тогаш $p\vec{a} = \vec{0}$.

Количник на векторот $\vec{a}$ со ненулти скалар p се нарекува векторот $\frac{1}{p}\vec{a}$; се пишува $\frac{\vec{a}}{p}$.

Непосредно од горните дефиниции следува дека за секој вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ векторот $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ е единечен вектор со ист правец и насока како и векторот $\vec{a}$. Според тоа $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$.

Теорема 1. Нека V е множеството слободни вектори. Точни се следниве тврдења:

- (i) За секој $p \in \mathbb{R}$ и секој $\vec{a} \in V$ важи $p\vec{a} \in V$.
- (ii) За секој $\vec{a} \in V$ и реалниот број 1 важи $1\vec{a} = \vec{a}$.
- (iii) За секои $p, q \in \mathbb{R}$ и секој $\vec{a} \in V$ важи $p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a}$.
- (iv) За секои $p, q \in \mathbb{R}$ и секој $\vec{a} \in V$ важи $(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$.
- (v) За секој $p \in \mathbb{R}$ и секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$.

Доказ. (i) и (ii) следуваат непосредно од дефиницијата на операцијата множење на вектор со скалар.

(iii) Тврдењето е очигледно точно во случај кога $p = 0$ или $q = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$. Ако $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$ тогаш векторите $p(q\vec{a})$ и $(pq)\vec{a}$ имаат ист модул $|p||q||\vec{a}|$ и иста насока. Поточно, ако p и q имаат ист знак, тогаш двата вектори имаат иста насока со векторот $\vec{a}$, додека ако p и q имаат спротивен знак, тогаш двата вектори имаат спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}$.

(iv) Да уочиме дека векторите $(p+q)\vec{a}$ и $p\vec{a} + q\vec{a}$ се колинеарни. Ако p и q имаат ист знак, тогаш двата вектори имаат иста насока. Во тој случај тие имаат еднакви модули:

$$|p\vec{a} + q\vec{a}| = |p\vec{a}| + |q\vec{a}| = |p||\vec{a}| + |q||\vec{a}| = (|p| + |q|)|\vec{a}| = |(p+q)\vec{a}|.$$

Ако p и q имаат спротивни знаци, на пример $p > 0$ и $q < 0$, тогаш векторите $p\vec{a}$ и $q\vec{a}$ имаат спротивни насоки. Во тој случај имаме:

$$|p\vec{a} + q\vec{a}| = ||p\vec{a}| - |q\vec{a}|| = ||p||\vec{a}| - |q||\vec{a}|| = ||p| - |q||\vec{a}| = |p+q||\vec{a}| = |(p+q)\vec{a}|.$$

Според тоа, векторите $(p+q)\vec{a}$ и $p\vec{a} + q\vec{a}$ имаат еднакви модули. Тие имаат исто така и иста насока, имено насоката на оној од векторите $p\vec{a}$ и $q\vec{a}$, пред кој скаларот е поголем по апсолутна вредност. Аналогно се докажува и случајот кога $p < 0$ и $q > 0$.

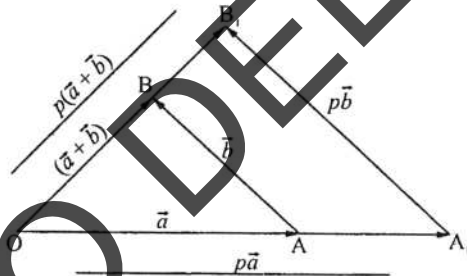
Тврдењето е очигледно точно во случај кога $p = 0$ или $q = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$.

(v) Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни и нека $p > 0$. Ги конструираме триаголниците OAB и OA_1B_1 така што $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1} = p\vec{a}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = p\vec{b}$ (црт. 1).

Од сличноста на триаголниците OAB и OA_1B_1 следува дека векторите $\vec{a} + \vec{b}$, $p(\vec{a} + \vec{b})$ и $p\vec{a} + p\vec{b}$ се колинеарни. Тие имаат иста насока, бидејќи $p > 0$.

Од сличноста на триаголниците OAB и OA_1B_1 добиваме $\overrightarrow{OB_1} : \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} : \overrightarrow{OA}$, односно

$|p\vec{a} + p\vec{b}| : |\vec{a} + \vec{b}| = |p\vec{a}| : |\vec{a}|$, од каде што следува дека $|p\vec{a} + p\vec{b}| = |p| |\vec{a} + \vec{b}| = |p(\vec{a} + \vec{b})|$. Според тоа, векторите $p\vec{a} + p\vec{b}$ и $p(\vec{a} + \vec{b})$ имаат еднакви модули.



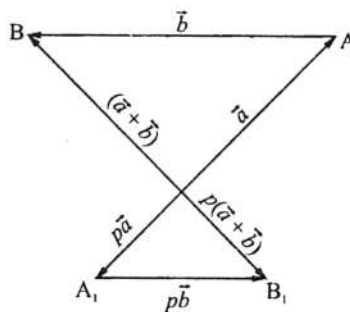
црт. 1

Случајот $p < 0$ се докажува аналогно, со таа разлика што тогаш векторите $p(\vec{a} + \vec{b})$ и $p\vec{a} + p\vec{b}$ се колинеарни, но имаат спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a} + \vec{b}$ (црт. 2).

Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни и нека $p > 0$. Тогаш векторите $p\vec{a} + p\vec{b}$ и $p(\vec{a} + \vec{b})$ се колинеарни. Уште повеќе тие имаат иста насока, бидејќи $p > 0$. Од

$|p(\vec{a} + \vec{b})| = |p| |\vec{a} + \vec{b}| = |p| (|\vec{a}| + |\vec{b}|) = |p\vec{a}| + |p\vec{b}| = |p\vec{a} + p\vec{b}|$ заклучуваме дека векторите $p\vec{a} + p\vec{b}$ и $p(\vec{a} + \vec{b})$ имаат еднакви модули.

Случајот $p < 0$ се докажува аналогно со таа разлика што тогаш векторите $p(\vec{a} + \vec{b})$ и $p\vec{a} + p\vec{b}$ се колинеарни, но имаат спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a} + \vec{b}$. ■



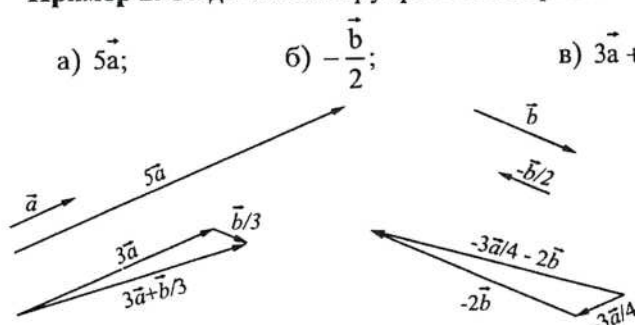
црт. 2

Пример 1. Збирот на два скалара се множи со збирот на два вектори како што се множи бином со бином:

$$(p+q)(\vec{a} + \vec{b}) = p(\vec{a} + \vec{b}) + q(\vec{a} + \vec{b}) = \quad (\text{својство (iv)})$$

$$= p\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{a} + q\vec{b}. \quad (\text{својство (v)}). \spadesuit$$

Пример 2. За да се конструираат векторите:



црт. 3

забележуваме дека согласно со дефиницијата за множење на вектор со скалар, векторите $5\vec{a}$, $3\vec{a}$ и $-\frac{3\vec{a}}{4}$ се колинеарни со векторот $\vec{a}$, додека векторите $-\frac{\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{b}}{3}$ и $-2\vec{b}$ се колинеарни со векторот $\vec{b}$ (црт. 3). ♦

Пример 3. Ако е даден триаголникот ABC и A_1 , B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB соодветно, тогаш е точно дека $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

Навистина, од $\vec{AA_1} = \vec{AB} + \frac{\vec{BC}}{2}$, $\vec{BB_1} = \vec{BC} + \frac{\vec{CA}}{2}$ и $\vec{CC_1} = \vec{CA} + \frac{\vec{AB}}{2}$ добиваме дека

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} + \frac{\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}}{2} = \vec{AA} + \frac{\vec{BB}}{2} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \spadesuit$$



Задачи за самостојна работа

1. Избери произволен вектор $\vec{a}$ и конструирај ги векторите:

- а) $2\vec{a}$; б) $3\vec{a}$; в) $\frac{3\vec{a}}{2}$; г) $\sqrt{2}\vec{a}$; д) $-\sqrt{3}\vec{a}$.

2. Избери два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни и конструирај ги векторите:

- а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$; в) $-\frac{3\vec{a}}{2} + \vec{b}$; г) $\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}$.

3. Избери четири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и конструирај ги векторите:

- а) $2\vec{a} - 3\vec{b} - (\vec{c} - 2\vec{d})$; б) $\vec{a} + 2(\vec{b} - 3\vec{c})$; в) $\vec{b} - (2\vec{a} + \vec{d}) - \vec{c}$.

4. Упрости ги изразите:

- а) $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(3\vec{a} - \vec{b}) + 4(\vec{a} + \vec{b})$; б) $2(\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) + 4\vec{b} - 2(\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c})$.

5. Решај ја векторската равенка по непознатиот вектор $\vec{x}$:

- а) $2\vec{x} - \vec{a} + \vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{x}$; б) $2(\vec{a} - \vec{x}) + 3\vec{b} + \vec{a} - \vec{x} = 3(\vec{a} + \vec{b} - \vec{x})$.

6. Три ненулни вектори формираат триаголник ако и само ако $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Докажи!
7. Ако A, B, C и D се темиња на паралелограм, а O е пресечната точка на неговите дијагонали, тогаш $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$. Докажи!
8. Нека точките A, B, C и D се произволни точки и нека M и N се средини на отсечките AB и CD, соодветно. Докажи дека $2\vec{MN} = \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

2.5. Делење на колинеарни вектори

Според дефиницијата за множење на вектор со скалар, векторите $\vec{a}_1 = r\vec{a}_2$ ($r \neq 0$, $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$) и $\vec{a}_2$ се колинеарни. Кога $r=0$ векторот $\vec{a}_1 = r\vec{a}_2$ е нултиот вектор. За да може да зборуваме за колинеарност на векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, за секој скалар r ќе сметаме дека нултиот вектор е колинеарен со секој вектор.

Обратно, ако векторот $\vec{a}_1$ е колинеарен со векторот $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$), тогаш постои скалар r така што $\vec{a}_1 = r\vec{a}_2$.

Навистина, ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ имаат иста насока, тогаш бројот $\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$ избран како скалар r го исполнува условот $\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \vec{a}_2 = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} |\vec{a}_2| = |\vec{a}_1|$ што значи дека векторите $\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \vec{a}_2$ и $\vec{a}_1$ се еднакви, односно $\vec{a}_1 = r\vec{a}_2$.

Ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ имаат спротивни насоки, тогаш бројот $-\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}$ го избираме за скалар r со којшто се множи $\vec{a}_2$. Повторно добиваме дека $\vec{a}_1 = r\vec{a}_2$.

Во секој случај бројот r , за којшто $\vec{a}_1 = r\vec{a}_2$ се нарекува **количник** на колинеарните вектори $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$) и се пишува $r = \frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2}$.

Значи, ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$) се колинеарни, тогаш

$$\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}, \text{ при иста насока на } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2, \text{ и}$$

$$\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = -\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}, \text{ при спротивни насоки на } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2.$$

Ако векторот $\vec{a}$ е колинеарен со единичниот вектор $\vec{e}$, тогаш количникот $\frac{\vec{a}}{\vec{e}}$ се

нарекува **алгебарска вредност** на векторот $\vec{a}$.

За произволно дадени вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и произволни скалари p и q да ја разгледаме равенката $p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$.

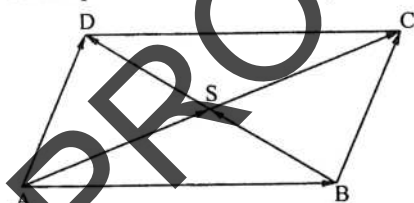
Забележуваме дека равенството секогаш е можно, бидејќи за $p=0$ и $q=0$ имаме $0\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. Значи, парот скалари $(0,0)$ може да се нарече тривијално решение на равенката за секој избор на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Се поставува прашањето дали постојат скалари p и q од кои што барем еден е ненулта (нетривијално решение (p,q)) така што векторот $p\vec{a} + q\vec{b}$ ќе биде еднаков на нултиот вектор. Одговорот секако зависи од изборот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

(i) За $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, јасно е дека секој подреден пар $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ ја задоволува разгледуваната равенка, значи $\mathbb{R}^2$ е множеството решенија на равенката.

(ii) За $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ се воочува дека $\{(p,0) | p \in \mathbb{R}\}$ е множеството решенија на равенката.

(iii) За $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ и $\vec{a} = k\vec{b}$, за некој скалар k , равенката се сведува во еквивалентна форма $(kp + q)\vec{b} = \vec{0}$. Нејзиното множество решенија $\{(p, -kp) | p \in \mathbb{R}\}$ следува од скаларното равенство $kp + q = 0$, кое мора да биде исполнето за да биде еднаков на нултиот вектор векторот $(kp + q)\vec{b}$, согласно со претпоставката $\vec{b} \neq \vec{0}$.

(iv) За вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни (значи и ненулта) тривијалното решение $(0,0)$ е единственото решение на разгледуваната равенка. Претпоставката за постоење на нетривијално решение (p,q) во кое без губење на општоста на пример, $p \neq 0$ повлекува точност на равенката $\vec{a} + \frac{q}{p}\vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{a} = -\frac{q}{p}\vec{b}$ што противречи на претпоставката дека векторите не се колинеарни.



Задача 1. Покажи дека пресечната точка на дијагоналите во секој паралелограм е нивна средина.

Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S е пресечната точка на неговите дијагонали (црт. 1). Векторот $\vec{AS}$ е колинеарен со векторот $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, па $\vec{AS} = \lambda(\vec{AB} + \vec{AD})$,

црт.1 за некој скалар λ . Слично, векторот $\vec{BS}$ е колинеарен со векторот $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$, па $\vec{BS} = \mu(\vec{AD} - \vec{AB})$, за некој скалар μ . Од $\vec{AB} = \vec{AS} + \vec{SB}$, добиваме дека $(\lambda + \mu - 1)\vec{AB} + (\lambda - \mu)\vec{AD} = \vec{0}$. Векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ не се колинеарни, па $\lambda + \mu - 1 = 0$ и $\lambda - \mu = 0$, од каде што следува дека $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. ♦



Задачи за самостојна работа

- Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Најди ги x и y , ако
 - $(2x - y)\vec{a} + (x + 2y - 5)\vec{b} = \vec{0}$;
 - $(3x + y)(\vec{a} + \vec{b}) - (y + 5)\vec{b} = (x - 1)\vec{a} - (x + 2y)\vec{b}$.
- Докажи дека средните линии во произволен четириаголник се преполовуваат.
- Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. За која вредност на параметарот p векторите $\vec{c} = (p - 1)\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = (2 + 3p)\vec{a} - 2\vec{b}$ се колинеарни?
- Нека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм и нека N е средина на страната AB , а M е средина на страната AD . Изрази го векторот $\vec{AT}$ преку векторите $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$, ако T е пресечна точка на правите MB и ND .

2.6. Линеарна комбинација на вектори

За кој било природен број $k \geq 1$, за произволно дадени вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ и скалари $p_1, p_2, \dots, p_k$ изразот $p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + \dots + p_k\vec{a}_k$ претставува еднозначно определен вектор $\vec{s}$, согласно со својствата на операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар. Вака претставениот вектор $\vec{s}$ се нарекува **линеарна комбинација** на векторите $\vec{a}_i$, $i = 1, \dots, k$, со коефициенти p_i , $i = 1, \dots, k$, соодветно. За векторот $\vec{s} = p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + \dots + p_k\vec{a}_k$ уште се вели дека е **разложен** по векторите $\vec{a}_i$, $i = 1, \dots, k$.

Пример 1. На пример, векторот $\vec{s} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ со коефициенти $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и -1 соодветно. За векторот $\vec{s}$ се вели дека е разложен по векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. ♦

Дефиниција 1. Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ се нарекуваат **линеарно зависни** ако постојат скалари $p_1, p_2, \dots, p_k$ од кои барем еден е различен од нула, така што $p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + \dots + p_k\vec{a}_k = \vec{0}$.

Пример 2. На пример, векторите $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = \frac{1}{3}(-\vec{a} + 2\vec{b})$ се линеарно зависни бидејќи $2\vec{c} + 3\vec{d} = \vec{0}$ и при тоа коефициентите се различни од нула. ♦

Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ се нарекуваат **линеарно независни** ако не се линеарно зависни. Непосредно од дефиницијата следува дека векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ се линеарно независни ако од $p_1 \vec{a}_1 + p_2 \vec{a}_2 + \dots + p_k \vec{a}_k = \vec{0}$ следува дека $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 0$.

Теорема 1. Векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ се линеарно зависни ако и само ако се колинеарни.

Доказ. Ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ се линеарно зависни, тогаш постојат скалари p_1 и p_2 од кои барем еден е различен од нула така што $p_1 \vec{a}_1 + p_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$. Оттука, на пример за $p_1 \neq 0$, имаме $\vec{a}_1 = -\frac{p_2}{p_1} \vec{a}_2$, што значи векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ се колинеарни.

Обратно, нека векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ се колинеарни. Тогаш постои скалар p , така што $\vec{a}_1 = p \vec{a}_2$, без да се изгуби општоста. Последното равенство може да го запишеме во облик $1 \cdot \vec{a}_1 - p \vec{a}_2 = \vec{0}$, што значи дека векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ се линеарно зависни, бидејќи барем 1 пред $\vec{a}_1$ е различен од нула. ■

Задача 1. Нека векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не се колинеарни. За која вредност на параметарот λ векторите $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ се колинеарни?

Забележуваме дека $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, па затоа може да се претпостави дека $\vec{a} = p\vec{b}$ т.е. $\lambda \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = p(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$, или еквивалентно $(\lambda - 3p)\vec{e}_1 + (2 - p)\vec{e}_2 = \vec{0}$. Но, векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не се колинеарни и затоа мора да биде $\begin{cases} \lambda - 3p = 0 \\ 2 - p = 0 \end{cases}$. Значи за $p = 2$ и $\lambda = 6$ векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. ♦

За три вектори велиме дека се **компланарни** ако се паралелни на една рамнина.

Теорема 2. Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ се линеарно зависни ако и само ако се компланарни.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ се линеарно зависни. Тогаш постојат скалари p_1, p_2 и p_3 од кои барем еден е различен од нула, така што

$$p_1 \vec{a}_1 + p_2 \vec{a}_2 + p_3 \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Нека, на пример $p_1 \neq 0$ така што е точно равенството $\vec{a}_1 = -\frac{p_2}{p_1} \vec{a}_2 - \frac{p_3}{p_1} \vec{a}_3$. Тогаш векторите

$-\frac{p_2}{p_1} \vec{a}_2$ и $-\frac{p_3}{p_1} \vec{a}_3$ се колинеарни со векторите $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$, соодветно, а векторот $\vec{a}_1$ како

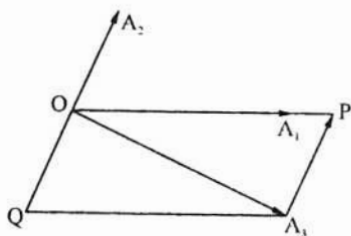
нивен збир е компланарен со векторите $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ (лежи во рамнината определена со $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$).

Обратно, нека векторите $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ се компланарни. Ако два од нив се колинеарни, на пример, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ тогаш $\vec{a}_1 = r\vec{a}_2$ за некој скалар r , па

$$1 \cdot \vec{a}_1 - r\vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0},$$

значи дека векторите $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ се линеарно зависни.

Ако меѓу векторите нема колинеарни, ги конструираме векторите $(OA_1) \in \vec{a}_1$, $(OA_2) \in \vec{a}_2$ и $(OA_3) \in \vec{a}_3$ (црт. 1). Низ точката A_3 повлекуваме прави паралелни со правите OA_1 и OA_2 . Да ги означиме со P и Q пресечните точки на конструираниите прави со



црт. 1

правите OA_2 и OA_1 , соодветно. Тогаш $\vec{a}_3 = \vec{OA}_3 = \vec{OP} + \vec{PA}_3$.

Векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ се колинеарни со векторите $\vec{OP}$ и $\vec{PA}_3$, па според тоа $\vec{a}_1 = r_1 \vec{OP}$ и $\vec{a}_2 = r_2 \vec{PA}_3$, за некои скалари r_1 и r_2 .

Тогаш $\vec{a}_3 = r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2$, од каде што следува дека

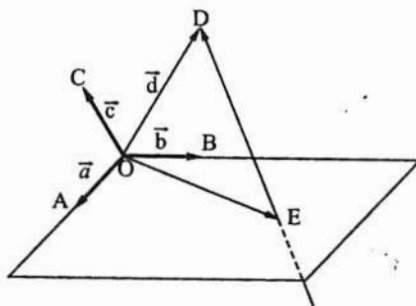
$$r_1 \vec{a}_1 + r_2 \vec{a}_2 + (-1) \vec{a}_3 = \vec{0},$$

односно векторите $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ се линеарно зависни. ■

Задача 2. Докажи дека кои било четири вектори се линеарно зависни.

Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се кои било четири вектори. Ако кои било три од нив се компланарни, на пример $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ тогаш $\vec{c} = r\vec{a} + q\vec{b}$, за некои скалари r и q , па ќе имаме $r\vec{a} + q\vec{b} + (-1)\vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{0}$, од каде што следува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се линеарно зависни.

Ако кои било три од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не се компланарни, ги конструираме векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$, $(OC) \in \vec{c}$ и $(OD) \in \vec{d}$ (црт. 2). Низ точката D



црт. 2

повлекуваме права паралелна со правата OC којашто ја прободува рамнината определена со точките O , A и B во точката E . Ставаме $(OE) \in \vec{c}$ и $(ED) \in \vec{f}$. Тогаш векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{e}$ се компланарни, па $\vec{e} = r\vec{a} + q\vec{b}$, за некои скалари r и q . Векторот $\vec{f}$ е колинеарен со векторот $\vec{c}$, па $\vec{f} = g\vec{c}$, за некој скалар g . Тогаш $\vec{d} = r\vec{a} + q\vec{b} + g\vec{c}$ од каде што добиваме $r\vec{a} + q\vec{b} + g\vec{c} + (-1)\vec{d} = \vec{0}$, односно векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се линеарно зависни. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно независни. Дали векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се линеарно зависни или независни, ако

а) $\vec{p} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{0}$;

б) $\vec{p} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{q} = 6\vec{a} - 24\vec{b}$?

2. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни. Дали векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се линеарно зависни или независни, ако

а) $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ и $\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{a} - 3\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

б) $\vec{p} = 4\vec{a} - \vec{b} + 7\vec{c}$ и $\vec{q} = -\vec{a} + 2\vec{c}$?

3. Дадени се векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$ и $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$. Под кои услови точките А, В и С припаѓаат на иста права?

4. Нека $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ се три линеарно независни вектори. За кои вредности на параметрите λ и μ , векторите $\vec{a} = \lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ и $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ се колинеарни?

5. Нека векторите $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ се линеарно независни. Покажи дека и векторите $\vec{p} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$, $\vec{q} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ и $\vec{r} = 3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ се линеарно независни.

6. Најди ја вредноста на параметарот p за која векторите $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = p\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, се компланарни, ако $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ не се компланарни вектори.

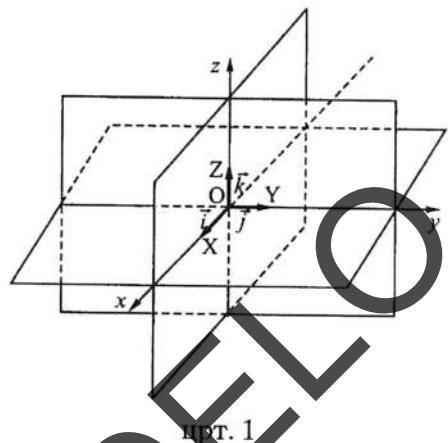
2.7. Координати на вектор

Како основна алатка во решавањето на бројни проблеми во аналитичката геометрија се користат векторите. Нив досега ги задававме графички со помош на насочени отсечки како нивни претставници. Воведувањето на координатниот начин на задавање на векторите е основа за користење на алгебарски методи во решавањето на геометриски проблеми.

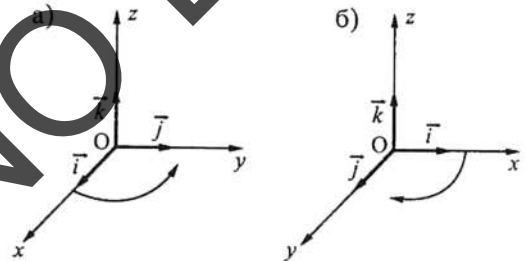
Нека во просторот се дадени три заемно нормални вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, такви што $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, и една фиксна точка О. Ги конструираме векторите $(OX) \in \vec{i}$, $(OY) \in \vec{j}$ и $(OZ) \in \vec{k}$. На секоја од правите ОХ, ОУ и ОZ ја избираме за позитивна насока насоката на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соодветно (црт. 1). Вака добиените прави ги викаме **координатни оски**, првата се нарекува x -оска или апсциса, втората y -оска или ордината, а третата z -оска или апликата. Трите рамнини определени со паровите оски xu , yz и xz се нарекуваат **координатни рамнини**. Со изборот на точката О и векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ велиме дека сме

избрале **правоаголен декартов координатен систем**, кој ќе го означуваме со $(O; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ или само со $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$. Точката O се нарекува **координатен почеток**, а векторите $\hat{i}$, $\hat{j}$ и $\hat{k}$ **координатни вектори**. На трите бројни оски за единица мера за должина ја избираме должината на координатните вектори. Од тие причини координатните вектори ги нарекуваме уште и **единечни вектори**.

Во зависност од ориентацијата на координатните оски разликуваме десен и лев координатен систем (црт. 2). Поточно, координатниот систем се вика **десен координатен систем** ако сликата на x -оската



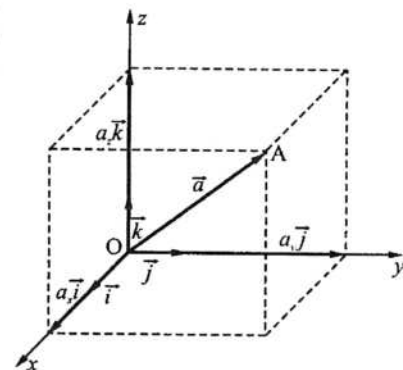
при ротација околу z -оската за агол $\frac{\pi}{2}$ во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот се совпаѓа со y -оската (црт. 2а). Во спротивно координатниот систем се вика **лев координатен систем** (црт. 2б). Координатните оски на десниот (левиот) координатен систем во просторот може да ги претставиме и со трите прста од десната (левата) рака и тоа: x -оската- со палецот, y -оската-со показалецот, а z -оската- со средниот прст.



Нека $\vec{a}$ е произволен вектор во просторот и нека $(OA) \in \vec{a}$ (црт. 3). Познато ни е веќе дека кои

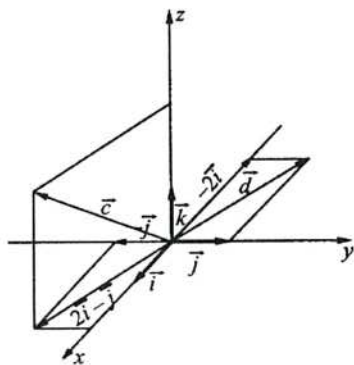
било четири вектори се линеарно зависни. Уште повеќе, ако три од нив не се компланарни, тогаш четвртиот може да се изрази како нивна линеарна комбинација. Според тоа постои разложувањето $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$, каде што $\hat{i}$, $\hat{j}$ и $\hat{k}$ се координатни вектори.

Разложувањето е единствено, бидејќи ако постои уште едно такво разложување $\vec{a} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$, тогаш $\vec{a} - \vec{a} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k} = \vec{0}$, од каде што заради линеарната независност на векторите $\hat{i}$, $\hat{j}$ и $\hat{k}$ следува дека $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ и $a_z = b_z$.



црт. 3

Дефиниција 1. Коефициентите во разложувањето на даден вектор $\vec{a}$ се нарекуваат **координати** на векторот во однос на избран координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; записот $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ е координатно претставување на векторот $\vec{a}$. Притоа a_x се нарекува **прва координата**, a_y **втора координата**, а a_z се нарекува **трета координата** на векторот $\vec{a}$.



црт.4

Координатните претставувања на единечните вектори се $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$, додека за нултиот вектор важи $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Пример 1. Векторот $\vec{a} = 7\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ има координати $a_x = 7$, $a_y = 4$ и $a_z = -3$, а векторот $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{k}$ има координати $b_x = -\frac{1}{2}$, $b_y = 0$ и $b_z = 1$; $(7, 4, -3)$ е координатното претставување на векторот $\vec{a}$, додека $(-\frac{1}{2}, 0, 1)$ е координатното претставување на векторот $\vec{b}$.

Подредените тројки $(2, -1, \frac{5}{2})$ и $(-2, 1, 0)$ ги претставуваат векторите $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}$ и $\vec{d} = -2\vec{i} + \vec{j}$, соодветно. На црт. 4 векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се претставени геометриски во координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги координатните претставувања на векторите:

- а) $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; в) $\vec{a} = \vec{j} - 2\vec{k}$; г) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

2. Разложи ги координатните претставувања на векторите

- а) $\vec{a} = (0, -1, 4)$; б) $\vec{a} = (7, 0, -1)$; в) $\vec{a} = (0, -2, 0)$; г) $\vec{a} = (1, -2, -6)$,

по координатните вектори.

3. Во координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ конструирај ги векторите:

- а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; б) $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; в) $\vec{a} = 7\vec{j} - 2\vec{k}$; г) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{k}$.

4. Конструирај ги векторите:

- а) $\vec{a} = (3, 1, 5)$; б) $\vec{a} = (-\frac{1}{2}, 1, 4)$; в) $\vec{a} = (0, -2, 0)$; г) $\vec{a} = (0, -1, 2)$.

2.8. Операции со вектори зададени со координатни претставувања

Нека се дадени векторите $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогаш од

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ и } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

добиваме дека

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$$

односно

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

Според тоа, секоја координата на збирот од два вектори е еднаква на збирот на соодветните координати на векторите, додека секоја координата на разликата на еден вектор со друг е еднаква на разликата на соодветните координати на векторите.

Пример 1. Ако $\vec{a} = (2, 1, 3)$ и $\vec{b} = (0, -2, 1)$, тогаш координатните претставувања на збирот $\vec{a} + \vec{b}$ и разликата $\vec{a} - \vec{b}$ се, соодветно,

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 1, 3) + (0, -2, 1) = (2 + 0, 1 + (-2), 3 + 1) = (2, -1, 4),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2, 1, 3) - (0, -2, 1) = (2 - 0, 1 - (-2), 3 - 1) = (2, 3, 2). \spadesuit$$

Нека е даден векторот $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и нека λ е произволен скалар. Тогаш од $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ следува дека $\lambda \vec{a} = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$, односно

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Значи, секоја координата на производот на еден вектор со скалар е еднаква на производот на соодветната координата на векторот со дадениот скалар.

Пример 2. Ако $\vec{a} = (-1, 0, 3)$, тогаш координатните претставувања на векторите $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{a}$ се, соодветно

$$2\vec{a} = 2(-1, 0, 3) = (2(-1), 2 \cdot 0, 2 \cdot 3) = (-2, 0, 6),$$

$$-3\vec{a} = -3(-1, 0, 3) = (-3(-1), (-3) \cdot 0, (-3) \cdot 3) = (3, 0, -9),$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(-1, 0, 3) = \left(\frac{1}{2}(-1), \frac{1}{2} \cdot 0, \frac{1}{2} \cdot 3\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right). \spadesuit$$

Теорема 1. Ако $\vec{a}_1 = (p_1, q_1, r_1)$, $\vec{a}_2 = (p_2, q_2, r_2), \dots, \vec{a}_k = (p_k, q_k, r_k)$ и ако $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ се дадени скалари, тогаш векторот $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$ има координатно претставување $(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k, \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \dots + \lambda_k q_k, \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k)$.

Доказ. Согласно со својствата на операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар, како и својствата на операциите собирање и множење на реални броеви, од равенствата

$$\vec{a}_1 = p_1 \vec{i} + q_1 \vec{j} + r_1 \vec{k},$$

$$\vec{a}_2 = p_2 \vec{i} + q_2 \vec{j} + r_2 \vec{k},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\vec{a}_k = p_k \vec{i} + q_k \vec{j} + r_k \vec{k},$$

следува $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots\dots\dots + \lambda_k \vec{a}_k =$

$$= \lambda_1 p_1 \vec{i} + \lambda_1 q_1 \vec{j} + \lambda_1 r_1 \vec{k} + \lambda_2 p_2 \vec{i} + \lambda_2 q_2 \vec{j} + \lambda_2 r_2 \vec{k} + \dots + \lambda_k p_k \vec{i} + \lambda_k q_k \vec{j} + \lambda_k r_k \vec{k} =$$

$$= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k) \vec{i} + (\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \dots + \lambda_k q_k) \vec{j} + (\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k) \vec{k}.$$

Според тоа,

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k, \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \dots + \lambda_k q_k, \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k).$$

Пример 3. Ако $\vec{a}_1 = (0, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 3, 0)$, $\vec{a}_3 = (3, 0, 1)$ и $\vec{a}_4 = (-2, 1, 1)$, тогаш координатните претставувања на векторите $4\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ и $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 - 2\vec{a}_4$ се, соодветно

$$4\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = (4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 3, 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 0, 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 1) = (-6, -1, -1),$$

$$\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 - 2\vec{a}_4 = (0 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2), 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1, 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = (11, -6, 1). \blacklozenge$$

Теорема 2. Ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, тогаш $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Доказ. Векторот $\vec{a}$ може да го запишеме во облик $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Векторите

$(OA) \in a_x \vec{i}$, $(OB) \in a_y \vec{j}$ и $(OC) \in a_z \vec{k}$ се рабови на правоаголен паралелепипед и притоа модулот на векторот $(OD) \in \vec{a}$ е еднаков на должината на неговата дијагонала (црт. 1). Тогаш

$$|(OD)|^2 = |(OA)|^2 + |(OB)|^2 + |(OC)|^2,$$

односно $|a_x \vec{i}|^2 = a_x^2$. Поради $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, имаме

$$|a_x \vec{i}|^2 = a_x^2, \quad |a_y \vec{j}|^2 = a_y^2 \quad \text{и} \quad |a_z \vec{k}|^2 = a_z^2, \quad \text{од каде}$$

што следува дека $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, односно

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \blacksquare$$

Пример 4. Модулот на векторот $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ е $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-7)^2} = 3\sqrt{6}$. $\blacklozenge$



Задачи за самостојна работа

1. Најди го координатното претставување на збирот на векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, ако:

а) $\vec{a}_1 = (-4, 1, 0)$ и $\vec{a}_2 = (3, 0, -1)$; б) $\vec{a}_1 = (-7, 4, -3)$ и $\vec{a}_2 = (-5, 0, 6)$.

2. Запиши го координатното претставување на разликата на векторот $\vec{a}_1$ со векторот $\vec{a}_2$, ако:

а) $\vec{a}_1 = (-2, 6, 0)$ и $\vec{a}_2 = (-5, -3, 2)$; б) $\vec{a}_1 = (0, 1, 7)$ и $\vec{a}_2 = (3, -7, -1)$.

3. Дадени се векторите $\vec{a}_1 = \left(\frac{1}{2}, 3, 7\right)$ и $\vec{a}_2 = (2, -3, 0)$. Најди го координатното претставување на векторите:

а) $3\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2$; б) $-2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$; в) $\vec{a}_1 - 6\vec{a}_2$.

4. Дадени се векторите $\vec{a}_1 = (0, 0, -4)$, $\vec{a}_2 = (3, -4, -3)$, $\vec{a}_3 = (-1, 3, 0)$ и $\vec{a}_4 = (0, -2, 1)$. Запиши го координатното претставување на векторите:

а) $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$; б) $2\vec{a}_1 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4$; в) $-\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 - 4\vec{a}_4$.

5. Два вектори се еднакви ако и само ако им се еднакви соодветните координати. Докажи!

6. Пресметај го модулот на векторот $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

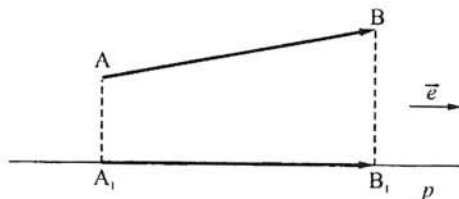
7. Покажи дека векторите $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, -4)$ и $\vec{c} = (3, 1, 1)$ се линейно независни.

2.9. Ортогонална проекција на вектор

Нека се дадени правата p и векторот (AB) (црт. 1). **Ортогонална проекција** на векторот (AB) врз правата p е векторот (A_1B_1) , каде што A_1 и B_1 се ортогоналните проекции на точките A и B врз правата p , и пишуваме

$$\text{pr}_p(AB) = (A_1B_1).$$

На правата p ја избираме за позитивна насока насоката на избран вектор $\vec{e} \neq 0$ паралелен на правата p . Вака ориентирана правата p ја нарекуваме **оска**, а векторот (A_1B_1) **ортогонална проекција** на векторот AB врз оската p .



црт. 1

Ако $(AB) \sim (CD)$, тогаш $(A_1B_1) \sim (C_1D_1)$, т.е. ортогоналните проекции на два екиполентни вектори се екиполентни вектори. Претходната дискусија допушта воведување на поимот **ортогонална проекција на слободен вектор** $\vec{a}$ врз слободен вектор $\vec{e} \neq 0$. Имено, ако (AB) е произволен врзан вектор од слободниот вектор $\vec{AB}$ и ако (A_1B_1) е ортогоналната проекција на векторот (AB) врз оска ориентирана со векторот $\vec{e}$, велиме дека слободниот вектор $\vec{A_1B_1}$ е ортогонална проекција на слободниот вектор $\vec{AB}$ врз векторот $\vec{e}$ и пишуваме:

$$\text{pr}_{\vec{e}} \vec{AB} = \vec{A_1B_1}.$$

Нека $\vec{a}$ е произволен вектор. Бројот $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0}$, каде што $\vec{e}_0$ е единечен вектор колинеарен

со $\vec{e}$, се вика **алгебарска вредност** на ортогоналната проекција на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{e}$. Од дефиницијата за делење на колинеарни вектори следува дека

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = \frac{|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}|}{|e_0|} = |\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}|, \text{ ако векторите } \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} \text{ и } \vec{e}_0 \text{ имаат иста насока, и}$$

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = -\frac{|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}|}{|e_0|} = -|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}|, \text{ ако векторите } \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} \text{ и } \vec{e}_0 \text{ имаат спротивни насоки.}$$

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два произволни вектори. Ако $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b}$, тогаш **агол** меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е аголот меѓу полуправите OA и OB и ќе го означуваме со $(\vec{a}, \vec{b})$. Да напомниме дека $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

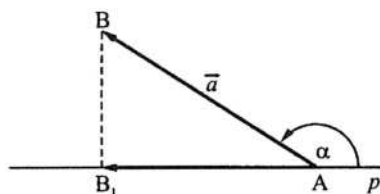
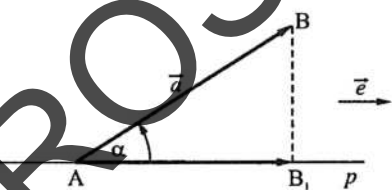
Теорема 1. Алгебарската вредност на ортогонална проекција на векторот $\vec{a}$ врз вектор $\vec{e} \neq \vec{0}$ е еднаква на производот од модулот на векторот $\vec{a}$ и косинусот од аголот $(\vec{a}, \vec{e})$.

Доказ. Да го разгледаме векторот $(AB) \in \vec{a}$ чијашто почетна точка A лежи на оската p која има иста насока како векторот $\vec{e}$ (црт. 2).

Да ја означиме со B_1 ортогоналната проекција на точката B врз оската p .

Ако аголот $(\vec{a}, \vec{e})$ е остар, тогаш $|AB_1| = |\overrightarrow{AB}| \cos(\vec{a}, \vec{e})$. Од $(AB_1) \in \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}$ и $(AB) \in \vec{a}$, имаме

$$|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{e}), \text{ односно } \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{e}).$$



црт. 2

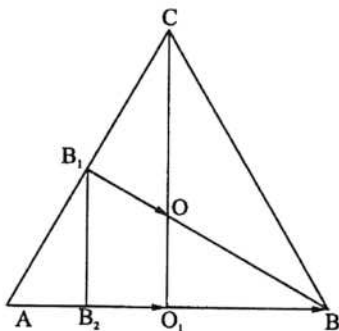
Ако аголот $(\vec{a}, \vec{e})$ е тап, тогаш $|AB_1| = |\overrightarrow{AB}| \cos(\pi - (\vec{a}, \vec{b})) = -|\overrightarrow{AB}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$. Бидејќи

$$(AB_1) \in \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} \text{ и } (AB) \in \vec{a}, \text{ како и во претходниот случај добиваме } \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{e}).$$

Доказот во случај кога $(\vec{a}, \vec{e}) = 0^\circ$, $(\vec{a}, \vec{e}) = 90^\circ$ или $(\vec{a}, \vec{e}) = 180^\circ$, како и случајот кога $\vec{a} = \vec{0}$ му го препуштаме на читателот. ■

Пример 1. Нека ABC е рамностран триаголник со страна a . Да ја означиме со O пресечната точка на висините на триаголникот, а со B_1 средината на отсечката AC (црт. 3). Ортогоналната проекција на векторот $\vec{B_1O}$ врз векторот $\vec{e} = \vec{AB}$ е векторот $\vec{B_2O_1}$, каде што B_2 е ортогоналната проекција на точката B_1 врз правата AB , а O_1 е ортогоналната проекција на точката O врз правата AB . Значи

$$\text{pr}_{\vec{e}} \vec{B_1O} = \vec{B_2O_1}.$$



црт. 3

Бидејќи $(\vec{B_1O}, \vec{e}) = 30^\circ$, имаме

$$\frac{\vec{B_2O_1}}{\vec{e_0}} = \frac{|\vec{B_1O}| \cos 30^\circ}{|\vec{e_0}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{B_1O}|}{1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{a}{4}.$$

Теорема 2. Алгебарската вредност на ортогоналната проекција на збир од два вектори е еднаква на збирот од алгебарските вредности на ортогоналните проекции на двата вектори.

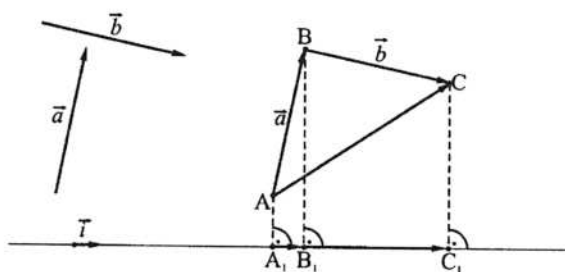
Доказ. Нека се дадени два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ако $(AB) \in \vec{a}$ и $(BC) \in \vec{b}$, тогаш $(AC) \in \vec{a} + \vec{b}$. Нека $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} = \vec{A_1B_1}$, $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} = \vec{B_1C_1}$ и $\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{A_1C_1}$ (црт. 4). Поради $\vec{A_1C_1} = \vec{A_1B_1} + \vec{B_1C_1}$ имаме $\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} + \text{pr}_{\vec{e}} \vec{b}$, од каде што следува дека

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{a} + \vec{b})}{\vec{e_0}} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{\vec{e_0}} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b}}{\vec{e_0}} \quad \text{Бидејќи}$$

$$\left(\frac{\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{a} + \vec{b})}{\vec{e_0}} - \left(\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{\vec{e_0}} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b}}{\vec{e_0}} \right) \right) \vec{e_0} = \vec{0},$$

поради $\vec{e_0} \neq \vec{0}$ добиваме дека

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{a} + \vec{b})}{\vec{e_0}} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{\vec{e_0}} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b}}{\vec{e_0}}. \blacksquare$$



црт. 4

Пример 2. За три дадени вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, важи

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{a} - \vec{b})}{\vec{e_0}} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{a} + (-\vec{b}))}{\vec{e_0}} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{\vec{e_0}} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}} (-\vec{b})}{\vec{e_0}} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{\vec{e_0}} - \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b}}{\vec{e_0}},$$

односно алгебарска вредност на ортогоналната проекција на разликата на еден вектор со друг е еднаква на разликата од алгебарската вредност на ортогоналната проекција на едниот вектор со алгебарската вредност на ортогоналната проекција на другиот вектор.

Понатаму, алгебарската вредност на ортогоналната проекција на збир од три вектори е еднаква на збирот од алгебарските вредности на ортогоналните проекции на векторите, односно

$$\frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{\vec{e}_0} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}{\vec{e}_0} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{a}}{\vec{e}_0} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}(\vec{b} + \vec{c})}{\vec{e}_0} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{a}}{\vec{e}_0} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{b} + \text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{c}}{\vec{e}_0} = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{a}}{\vec{e}_0} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{b}}{\vec{e}_0} + \frac{\text{pr}_{\vec{e}_0}\vec{c}}{\vec{e}_0} \quad \blacklozenge$$

Теорема 3. Координатите на векторот $\vec{a}$ се алгебарски вредности на ортогоналната проекција на векторот $\vec{a}$ врз соодветните координатни вектори.

Доказ. Нека е даден векторот $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Тогаш $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Согласно со крајот од пример 2, за проекцијата на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{i}$ имаме

$$\text{pr}_{\vec{i}}\vec{a} = \text{pr}_{\vec{i}}a_x \vec{i} + \text{pr}_{\vec{i}}a_y \vec{j} + \text{pr}_{\vec{i}}a_z \vec{k}.$$

Тогаш за алгебарската вредност на проекцијата на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{i}$ добиваме

$$\frac{\text{pr}_{\vec{i}}\vec{a}}{\vec{i}} = \frac{\text{pr}_{\vec{i}}a_x \vec{i}}{\vec{i}} + \frac{\text{pr}_{\vec{i}}a_y \vec{j}}{\vec{i}} + \frac{\text{pr}_{\vec{i}}a_z \vec{k}}{\vec{i}}$$

Алгебарската вредност $\frac{a_x \vec{i}}{\vec{i}}$ на векторот $\text{pr}_{\vec{i}}a_x \vec{i}$ е еднаква на $|a_x|$, ако векторот $a_x \vec{i}$ има иста насока со векторот $\vec{i}$, т.е. ако $a_x > 0$, додека таа е еднаква на $-|a_x|$, ако векторот $a_x \vec{i}$ има спротивна насока со векторот $\vec{i}$, т.е. ако $a_x < 0$. Ако $a_x > 0$, тогаш $(a_x \vec{i}, \vec{i}) = 0$, и согласно со теорема 2, имаме $|a_x| \cos(a_x \vec{i}, \vec{i}) = |a_x| = a_x$. Слично на ова, ако $a_x < 0$, тогаш $(a_x \vec{i}, \vec{i}) = \pi$, така што $|a_x| \cos(a_x \vec{i}, \vec{i}) = -|a_x| = a_x$. Понатаму, бидејќи $(a_y \vec{j}, \vec{i}) = (a_z \vec{k}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2}$, алгебарските

вредности на векторите $\text{pr}_{\vec{i}}a_y \vec{j}$ и $\text{pr}_{\vec{i}}a_z \vec{k}$ се еднакви на нула. Според тоа $\frac{\text{pr}_{\vec{i}}\vec{a}}{\vec{i}} = a_x$. Слично се

покажува и дека $\frac{\text{pr}_{\vec{j}}\vec{a}}{\vec{j}} = a_y$ и $\frac{\text{pr}_{\vec{k}}\vec{a}}{\vec{k}} = a_z$.

Од теорема 1 имаме $\frac{\text{pr}_{\vec{i}}\vec{a}}{\vec{i}} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{i})$, $\frac{\text{pr}_{\vec{j}}\vec{a}}{\vec{j}} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{j})$ и $\frac{\text{pr}_{\vec{k}}\vec{a}}{\vec{k}} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{k})$. Конечно,

$$a_x = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{i}), \quad a_y = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{j}) \quad \text{и} \quad a_z = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{k}). \quad \blacksquare$$



Задачи за самостојна работа

1. Во кој случај $\text{pr}_{\vec{e}}\vec{a} = \vec{0}$?

2. Докажи дека за произволен вектор $\vec{a}$ важи неравенството $|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| \leq |\vec{a}|$. Во кој случај важи равенство?

3. Најди ја алгебарската вредност на ортогоналната проекција на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{e}$, ако

а) $|\vec{a}| = 6$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 60^\circ$; б) $|\vec{a}| = 8$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 90^\circ$;

в) $|\vec{a}| = 5$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 0^\circ$; г) $|\vec{a}| = 6$ и $(\vec{a}, \vec{e}) = 180^\circ$.

4. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два ненулти вектори. Докажи дека $|\vec{a}| \|\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}\| = |\vec{b}| \|\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}\|$.

5. Докажи дека за произволен скалар λ важи равенството $\text{pr}_{\vec{e}} \lambda \vec{a} = \lambda \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}$.

6. Нека $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = -3$ и $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b}}{e_0} = 4$. Пресметај

а) $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} 3\vec{a}}{e_0}$;

б) $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} (\vec{b} - \vec{a})}{e_0}$;

в) $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \left(3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right)}{e_0}$.

2.10. Скаларен производ на вектори

Покрај операциите собирање, одземање и множење на вектор со скалар, во векторската алгебра има смисла и **множењето на вектори**. Множењето на два вектори може да се дефинира на два начина во зависност од тоа дали сакаме резултатот од извршената операција да биде скалар или вектор. Според тоа, ќе разликуваме скаларно и векторско множење на два вектори.

2.10.1. Дефиниција и својства на скаларниот производ на вектори

Дефиниција 1. Скаларен производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарекува бројот еднаков на производот од модулите на овие вектори и косинусот од аголот меѓу нив, и се означува со $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$. Значи, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Непосредно од дефиницијата на скаларен производ следува дека скаларниот производ е позитивен број, негативен број или е еднаков на нула во зависност од тоа дали аголот меѓу векторите соодветно е остар, тап или прав, или пак едниот од векторите е нултиот вектор.

Пример 1. Скаларниот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за коишто

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, е бројот $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$;

б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, е бројот $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 7 \cdot \cos 120^\circ = -14$. ♦

Теорема 1. За скаларниот производ на два вектори точни се следниве тврдења:

- (i) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. (комутативност)
- (ii) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и за секој $p \in \mathbb{R}$ важи $(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$. (асоцијативност)
- (iii) За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$. (дистрибутивност)

Доказ. Ако еден од векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ е нултиот вектор, тогаш очигледно тврдењата од теоремата се точни.

(i) Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Тогаш $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$, согласно со асоцијативноста и комутативноста на множењето реални броеви.

(ii) Нека $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и нека $p \in \mathbb{R}$. Ќе ги разгледаме следниве два случаја:

Ако $p > 0$, тогаш $(\vec{a}, \vec{b}) = (p\vec{a}, \vec{b})$. Од дефиницијата на скаларниот производ и асоцијативноста на множењето реални броеви имаме

$$(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = |p\vec{a}| |\vec{b}| \cos(p\vec{a}, \vec{b}) = p |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = p(|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})) = p(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Ако $p < 0$, тогаш $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - (p\vec{a}, \vec{b})$ и $|p| = -p$. Според тоа

$$(p\vec{a}) \cdot \vec{b} = |p\vec{a}| |\vec{b}| \cos(p\vec{a}, \vec{b}) = p |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\pi - (\vec{a}, \vec{b})) = -p(|\vec{a}| |\vec{b}| (-\cos(\vec{a}, \vec{b}))) = p(|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})) = p(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

(iii) Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$. Користејќи ја теоремата за збир на проекции добиваме

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \frac{\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c})}{a_0} = |\vec{a}| \left(\frac{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}}{a_0} + \frac{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{c}}{a_0} \right) = |\vec{a}| \frac{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}}{a_0} + |\vec{a}| \frac{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{c}}{a_0} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \blacksquare$$

Пример 2. Скаларниот производ на векторите $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$ и $\vec{b} = 12\vec{p} - 5\vec{q}$, каде што $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$ и $(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$, е скаларот

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} + 4\vec{q})(12\vec{p} - 5\vec{q}) = 36|\vec{p}|^2 + 33(\vec{p} \cdot \vec{q}) - 20|\vec{q}|^2 = 63. \blacklozenge$$

Во продолжение ќе докажеме уште некои својства на скаларниот производ.

Теорема 2. Модулот $|\vec{a}|$ на векторот $\vec{a}$ е квадратен корен од скаларниот производ $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ($= |\vec{a}|^2$), значи $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \left(= \sqrt{|\vec{a}|^2} \right)$.

Доказ. Од $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 |\cos 0^\circ| = |\vec{a}|^2$ следува дека $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. ■

Непосредно од теоремата следува дека $|\vec{a}| = 0$ ако и само ако $\vec{a} = \vec{0}$.

Пример 3. Ако се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такви што $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, тогаш должината на векторот $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ е еднаква на

$$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}} = \sqrt{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2} = \sqrt{4 \cdot 64 + 4 \cdot 16\sqrt{3} + 16} = \sqrt{272 + 64\sqrt{3}}. \blacklozenge$$

Следната теорема содржи формула за пресметување агол меѓу два ненулти вектори, ако е познат нивниот скаларен производ.

Теорема 3. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ненулти вектори. Тогаш $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Доказ. Нека $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Од $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ следува $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$. ■

Пример 4. За да го најдеме косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, за коишто $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, согласно со дефиницијата $\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}|}$, потребно е да ги најдеме вредностите $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$ и $\vec{c} \cdot \vec{d}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1,$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}} = \sqrt{(3\vec{a} - \vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})} = \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 6(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2} = \sqrt{9 \cdot 2^2 - 6 \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{31},$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{\vec{d} \cdot \vec{d}} = \sqrt{(2\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})} = \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 12(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1^2} = \sqrt{37},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (3\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 + 7(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2 = 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 28.$$

$$\text{Според тоа } \cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}|} = \frac{28}{\sqrt{31} \cdot \sqrt{37}} \approx 0,82675. \blacklozenge$$

Од теоремата непосредно се добива условот за ортогоналност на два вектори:

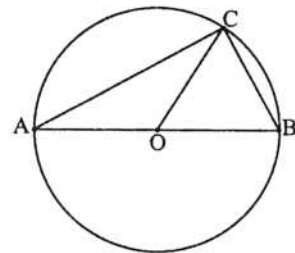
Последица 1. Два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ортогонални ако и само ако $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Навистина, ако $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, тогаш $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ако и само ако $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, што значи $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Доказ на теоремата на Талес: Секој периферен агол над дијаметар на кружница е прав.

Нека $K(O, r)$ е дадена кружница, AB нејзин дијаметар и C произволна точка од кружницата (црт. 1). Тогаш $\vec{CA} = \vec{CO} + \vec{OA}$, $\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB} = \vec{CO} - \vec{OA}$, па

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (\vec{CO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{CO} - \vec{OA}) = \vec{CO}^2 - \vec{OA}^2 = r^2 - r^2 = 0,$$



црт. 1

од каде што следува дека векторите $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ се заемно нормални, односно $\angle ACB = 90^\circ$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$; г) $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$; д) $2\vec{a} \cdot (-2\vec{b} + \vec{a})$,

ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

2. Докажи ги идентитетите:

а) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

в) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

г) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$;

д) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$, за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V$.

3. Одреди го знакот на скаларниот производ $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, ако

а) $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$;

б) $90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

4. Најди го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

5. Дадени се векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, така што $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$ и $(\vec{c}, \vec{a}) = 45^\circ$. Пресметај ја должината на векторот $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

6. Докажи ја Питагорината теорема: збирот од квадратите на катетите во правоаголен триаголник е еднаков со квадратот на хипотенузата.

7. Најди го косинусот од аголот φ меѓу дијагоналите на еден паралелограм чии страни се еднакви на a и b , а аголот меѓу нив е α .

2.10.2. Пресметување на скаларен производ со помош на координати

Теорема 1. Ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогаш $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Доказ. Од $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, поради асоцијативноста, комутативноста и дистрибутивноста на скаларниот производ, имаме

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} + (a_x b_y + a_y b_x) \vec{i} \cdot \vec{j} + (a_x b_z + a_z b_x) \vec{i} \cdot \vec{k} + (a_y b_z + a_z b_y) \vec{j} \cdot \vec{k}.\end{aligned}$$

Бидејќи векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се единечни и во парови заемно нормални, имаме $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ и $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. Затоа

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \blacksquare$$

Пример 1. Ако $\vec{a} = (3, -7, 0)$ и $\vec{b} = (4, 3, 2)$, тогаш $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + (-7) \cdot 3 + 0 \cdot 2 = -9$. ♦

Од теорема 1 непосредно следува дека ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, тогаш неговиот модул може да го пресметаме по формулата

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пример 2. Ако $\vec{a} = (-1, 2, 0)$, тогаш неговата должина е $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$. ♦

Исто така, од теорема 1 следува дека ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ се ненулти вектори, тогаш **формулата за пресметување агол** меѓу нив, ако е познат нивниот скаларен производ гласи:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Пример 3. За аголот меѓу векторите $\vec{a} = (2, 0, -2)$ и $\vec{b} = (0, 0, 6)$ се добива:

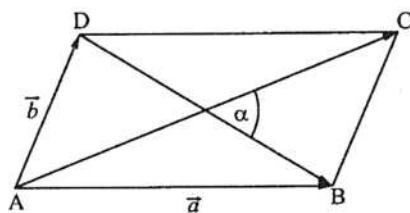
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{-12}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{36}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ добиваме } (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}. \blacklozenge$$

Ако два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се зададени со своите координатни претставувања $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогаш согласно со теорема 1 **условот за ортогоналност на два вектори** гласи:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Пример 4. За да се најде аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $(AB) \in \vec{a} = (2, 1, 0)$ и $(AD) \in \vec{b} = (0, -2, 1)$ се постапува на начин како што следува:

Нека ABCD е дадениот паралелограм и нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (црт. 1). Бараниот агол α е аголот меѓу векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ и може да го пресметаме по формулата



црт. 1

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{DB}}{|\vec{AC}| |\vec{DB}|}$$

Од $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}$ добиваме дека $\vec{AC} = (2, -1, 1)$ и $\vec{DB} = (2, 3, -1)$. Тогаш од $\vec{AC} \cdot \vec{DB} = 4 - 3 - 1 = 0$, користејќи го условот за нормалност на два вектори, може да заклучиме дека векторите $\vec{AC}$ и $\vec{DB}$ се ортогонални, па $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Задачи за самостојна работа

- Пресметај го скаларниот производ на векторите
 - $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ и $\vec{b} = (1, -2, 2)$;
 - $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.
- Пресметај ја должината на векторот
 - $\vec{a} = (-2, 6, 3)$;
 - $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.
- Најди го аголот меѓу векторите
 - $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ и $\vec{b} = (1, -2, 2)$;
 - $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$.
- Дали се заемно нормални векторите
 - $\vec{a} = (-2, 0, 3)$ и $\vec{b} = (4, 1, 2)$;
 - $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$?
- Најди вектор $\vec{x}$ колинеарен на векторот $\vec{a} = (2, -1, 2)$, кој ја задоволува равенката $\vec{a} \cdot \vec{x} = -18$.
- Дадени се векторите $\vec{a} = (2, 2, 2)$ и $\vec{b} = (0, 1, 0)$. Најди единечен вектор $\vec{x}$ кој е нормален на векторот $\vec{a}$, а со векторот $\vec{b}$ зафаќа агол од 60° .
- Дали векторите $(OA) \in \vec{a} = (10, -5, 10)$, $(OB) \in \vec{b} = (-11, -2, 10)$ и $(OC) \in \vec{c} = (-2, -14, -5)$ се рабови на коцка со заедничко теме?

2.11. Векторски производ на вектори

Освен скаларниот производ на вектори ќе дефинираме операција, наречена векторско множење.

2.11.1. Дефиниција и својства на векторскиот производ на вектори

При дефинирање на векторското множење ќе го користиме поимот **десна (лева) тројка вектори**. Три вектори за кои се знае кој од нив е прв, кој е втор, а кој е трет се нарекува **тројка вектори**. На пример, во тројката вектори $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ ќе сметаме дека векторот

$\vec{c}$ е прв, векторот $\vec{b}$ е втор, а векторот $\vec{a}$ е трет вектор. Тројката вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ кои не се компланарни се нарекува **десна (лева)** ако векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$, $(OC) \in \vec{c}$ се распоредени како палецот, показалецот и средниот прст од десната (левата) рака.

Дефиниција 1. Векторски производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарекува векторот $\vec{c}$ за којшто

(i) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$,

(ii) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ и $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, т.е. векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

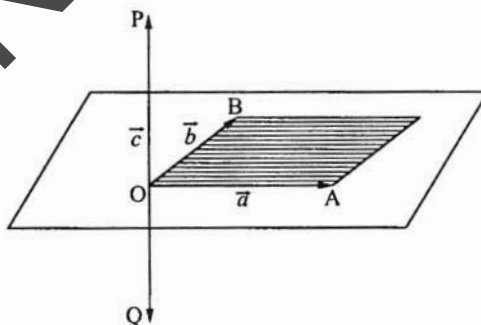
(iii) векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат десна тројка вектори.

Векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ќе го означуваме со $\vec{a} \times \vec{b}$. Да забележиме дека условот (i) го определува модулот на векторскиот производ, условот (ii) неговиот правец, додека условот (iii) ја определува неговата насока.

Пример 1. Векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за кои $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ има модул

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 3. \blacklozenge$$

Еден врзан вектор од $\vec{a} \times \vec{b}$ може да се конструира ако ја конструираме нормалата на рамнината определена со векторите $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b}$ во точката O (црт. 1), а потоа го одредуваме неговиот модул кој е бројно еднаков на мерниот број на плоштината на паралелограмот конструиран на векторите (OA) и (OB) . Овај услов го исполнуваат два вектори: (OP) и (OQ) . Но третиот услов од дефиницијата за векторски производ го исполнува само векторот (OP) , па според тоа $(OP) \in \vec{a} \times \vec{b}$.



црт. 1

Во следнава теорема се содржани неколку важни својства на векторскиот производ.

Теорема 1. За векторскиот производ на вектори точни се следниве тврдења:

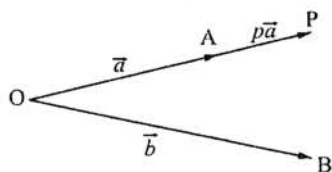
(i) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (антикомутативност);

(ii) За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и за секој $p \in \mathbb{R}$ важи $(p\vec{a}) \times \vec{b} = p(\vec{a} \times \vec{b})$ (асоцијативност);

(iii) За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивност);

(iv) За секој вектор $\vec{a} \in V$ и за секое $p \in \mathbb{R}$ важи $\vec{a} \times (p\vec{a}) = \vec{0}$.

Доказ. (i) Ако се навратиме на претходната дискусија векторот $\vec{OP}$ е еднаков на производот $\vec{a} \times \vec{b}$. Векторот $\vec{OQ}$ исто така ги исполнува првите два условия од дефиницијата за векторски производ, што значи има ист правец и ист модул како и векторот $\vec{OP}$, но $\vec{OP} = -\vec{OQ}$. Од друга страна $\vec{OQ} = \vec{b} \times \vec{a}$. Според тоа, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{OP} = -\vec{OQ} = \vec{b} \times \vec{a}$.



црт. 2

(ii) За доказ на тврдењето ќе ги разгледаме следниве два случаја:

Ако $p > 0$, тогаш

$$|(\vec{pa}) \times \vec{b}| = |\vec{pa}| |\vec{b}| \sin(\vec{pa}, \vec{b}) = p |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Од друга страна

$$|p(\vec{a} \times \vec{b})| = p |\vec{a} \times \vec{b}| = p |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Според тоа, $|(\vec{pa}) \times \vec{b}| = |p(\vec{a} \times \vec{b})|$. Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $\vec{pa}$ се колинеарни, векторите $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b}$ определуваат иста рамнина како и векторите $(OP) \in \vec{pa}$ и $(OB) \in \vec{b}$ (црт. 2). Тогаш векторите определени со нивните векторски производи имаат ист правец. Насоката на векторите $(\vec{pa}) \times \vec{b}$ и $p(\vec{a} \times \vec{b})$ е иста и е определена со насоката на векторот $\vec{a} \times \vec{b}$.

Ако $p < 0$, тогаш

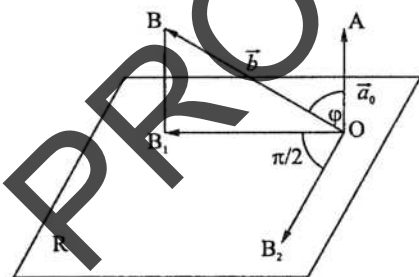
$$|(\vec{pa}) \times \vec{b}| = |\vec{pa}| |\vec{b}| \sin(\vec{pa}, \vec{b}) = p |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\pi - (\vec{a}, \vec{b})) = -p |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Од друга страна,

$$|p(\vec{a} \times \vec{b})| = p |\vec{a} \times \vec{b}| = -p |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Според тоа $|(\vec{pa}) \times \vec{b}| = |p(\vec{a} \times \vec{b})|$. Слично, како и во претходниот случај заклучуваме дека векторите $(\vec{pa}) \times \vec{b}$ и $p(\vec{a} \times \vec{b})$ имаат ист правец и насока, со таа разлика што во случај кога $p < 0$ нивната насока е спротивна од насоката на векторот $\vec{a} \times \vec{b}$.

(iii) Да го најдеме векторот $\vec{a}_0 \times \vec{b}$, каде што $|\vec{a}_0| = 1$. Од дефиницијата за векторски производ следува дека векторот $\vec{a}_0 \times \vec{b}$ е нормален на рамнината определена со векторите



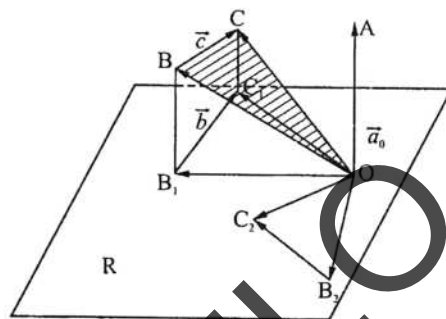
црт. 3

$(OA) \in \vec{a}_0$ и $(OB) \in \vec{b}$ (црт. 3). Нека R е рамнината нормална на правата OA во точката O и нека B_1 е нормалната проекција на точката B на рамнината R . Со ротација на векторот (OB_1) околу точката O во рамнината R за агол $\frac{\pi}{2}$ во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот, го добиваме векторот (OB_2) . Да го означиме со φ аголот $(\vec{a}_0, \vec{b})$.

Тогаш од триаголникот OBV_1 имаме $|\vec{OB}_1| = |\vec{OB}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$,

односно $|\vec{OB}_1| = |\vec{b}| \sin \varphi$. Заради $|\vec{OB}_1| = |\vec{OB}_2|$ добиваме дека $\vec{OB}_2 = \vec{a}_0 \times \vec{b}$.

Нека $(BC) \in \vec{c}$. Тогаш $\vec{b} + \vec{c} = \vec{OC}$ (црт. 4). Да ја означиме со C_1 нормалната проекција на точката C на рамнината R , а со (OC_2) векторот добиен со ротација на векторот (OC_1) околу точката O во рамнината R за агол $\frac{\pi}{2}$ во насока спротивна од насоката на движење на стрелката на часовникот. Тогаш $\vec{OC}_2 = \vec{a}_0 \times (\vec{b} + \vec{c})$ и $\vec{B}_2C_2 = \vec{a}_0 \times \vec{b}$, што се докажува на сличен начин како и равенството $\vec{OB}_2 = \vec{a}_0 \times \vec{b}$.



црт. 4

Од $\vec{OC}_2 = \vec{OB}_2 + \vec{B}_2C_2$ добиваме дека $\vec{a}_0 \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}_0 \times \vec{b} + \vec{a}_0 \times \vec{c}$.

Векторот $\vec{a}$ може да го запишеме во облик $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$. Ако последното равенство го помножиме со $|\vec{a}|$ добиваме

$$\begin{aligned} |\vec{a}| (\vec{a}_0 \times (\vec{b} + \vec{c})) &= |\vec{a}| (\vec{a}_0 \times \vec{b} + \vec{a}_0 \times \vec{c}), \\ (|\vec{a}| \vec{a}_0) \times (\vec{b} + \vec{c}) &= (|\vec{a}| \vec{a}_0) \times \vec{b} + (|\vec{a}| \vec{a}_0) \times \vec{c}, \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

(iv) Од $|\vec{a} \times (\vec{p}\vec{a})| = |-(\vec{p}\vec{a}) \times \vec{a}| = |-p(\vec{a} \times \vec{a})| = |-p||\vec{a}||\vec{a}| \sin 0^\circ = 0$, следува дека $\vec{a} \times (\vec{p}\vec{a}) = \vec{0}$. ■

Пример 2. За да се пресмета плоштината P на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$, каде што $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, се поаѓа од

$$P = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{AB}| |\vec{AD}| \sin(\angle \vec{AB}, \vec{AD}).$$

Притоа,

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) = -3(\vec{a} \times \vec{b}) + 2(\vec{b} \times \vec{a}) = -5(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Оттука

$$P = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = \frac{75}{2}. \blacklozenge$$

Од дефиницијата на векторски производ непосредно следува дека векторскиот производ е нултиот вектор, ако и само ако еден од векторите е нултиот вектор или ако векторите се колинеарни. Според тоа, равенството

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

го искажува **условот за колинеарност на два вектори.**

Пример 3. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни вектори. За да се најде вредност на параметарот λ за којашто векторите $\vec{c} = \lambda\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ се колинеарни се поаѓа од условот за колинеарност на векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$\vec{c} \times \vec{d} = (\lambda\vec{a} + 5\vec{b}) \times (3\vec{a} - 5\vec{b}) = \vec{0},$$

односно

$$\lambda\vec{a} \times 3\vec{a} + 5\vec{b} \times 3\vec{a} - \lambda\vec{a} \times 5\vec{b} - 5\vec{b} \times 5\vec{b} = 15(\vec{b} \times \vec{a}) + \lambda(\vec{b} \times \vec{a}) = (15 + \lambda)(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}.$$

Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, имаме $\vec{b} \times \vec{a} \neq \vec{0}$. Затоа $15 + \lambda = 0$, т.е. $\lambda = -15$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Пресметај го модулот $|\vec{a} \times \vec{b}|$, ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.

2. Најди го векторот $\vec{a} \times \vec{b}$, ако $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + 5\vec{r}$ и $\vec{b} = -4\vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r}$, каде што $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ е десна тројка заемно нормални и единични вектори.

3. Докажи ги идентитетите:

а) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

б) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$;

в) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d}$, за секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V$;

г) $\vec{a} \times (\vec{b} + \lambda \vec{a}) = (\vec{a} + \mu \vec{b}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$, за секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4. Пресметај ја плоштината на паралелограмот ABCD, конструиран над векторите $\vec{AB} = 2\vec{b} - \vec{a}$ и $\vec{AD} = 3\vec{a} + \vec{b}$, каде што $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

5. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $\vec{AB} = 2\vec{b} + \vec{a}$ и $\vec{AC} = \vec{a} + 3\vec{b}$, каде што $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се единични вектори кои зафаќаат агол од 30° .

6. Пресметај ја должината на висината од темето C на триаголникот ABC ако $\vec{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ и $\vec{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, при што векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се заемно нормални единични вектори.

7. Докажи дека од равенствата

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} \text{ и } \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$$

слеува дека векторите $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ се колинеарни.

2.11.2. Координати на векторски производ на вектори

Од дефиницијата за векторски производ за единичните координатни вектори имаме:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0},$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0},$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Теорема 1. Ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогаш $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y & a_z & | & a_z & a_x & | & a_x & a_y \\ b_y & b_z & | & b_z & b_x & | & b_x & b_y \end{pmatrix}$

Доказ. Нека $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Заради својствата на векторскиот производ и дефиницијата на детерминанта од втор ред имаме:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_x (-\vec{k}) + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y (-\vec{i}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \blacksquare\end{aligned}$$

Како последица од теоремата, користејќи ја дефиницијата на детерминанта од трет ред, векторскиот производ на векторите $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ може да го запишеме во облик:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Пример 1. За да ги најдеме координатите на векторскиот производ на векторите $\vec{a} = (3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (2, 4, -3)$ постапуваме на следниов начин: Бидејќи

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 12\vec{k} - (-4\vec{k} + 4\vec{i} - 9\vec{j}) = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 16\vec{k},$$

добиваме дека $\vec{a} \times \vec{b} = (2, 11, 16)$. ♦

Пример 2. Должината на висината од темето В на триаголникот ABC, за којшто $\vec{AB} = (4, -5, 0)$ и $\vec{BC} = (-4, 9, -3)$ може да се добие како што следува:

Плоштината Р на триаголникот ABC е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$. Според тоа

$$2P = |\vec{BA} \times \vec{BC}| = |-15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k}| = \sqrt{225 + 144 + 256} = 25.$$

Од елементарна геометрија е познато дека $2P = |\vec{AC}| |\vec{V_1B}|$, каде што V_1 е подножјето на нормалата спуштена од темето В. Бидејќи $\vec{AB} + \vec{BC} = (0, 4, -3)$ имаме $2P = 5 |\vec{V_1B}|$. Тогаш должината на бараната висина е $|\vec{V_1B}| = 5$. ♦

Ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогаш условот за нивна колинеарност $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, е исполнет ако и само ако секоја координата на векторскиот производ е еднаква на нула, т.е.

ако $a_y b_z = a_z b_y$, $a_z b_x = a_x b_z$, $a_x b_y = a_y b_x$, или, $\frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, $\frac{a_z}{b_z} = \frac{a_x}{b_x}$, $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$. При претпоставка, дека ако некоја координата на едниот вектор е нула, на пример $a_x = 0$, тогаш мора $b_x = 0$, и по дефиниција се зема $\frac{0}{0} = \frac{a_y}{b_y}$, $\frac{0}{0} = \frac{a_z}{b_z}$.

Според тоа **условот за колинеарност на два вектори** во координатна форма гласи:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример 3. За да се испита дали векторите $\vec{a} = (1, -2, 3)$ и $\vec{b} = (3, -6, 9)$ се колинеарни, се формираат односите $\frac{1}{3}$, $\frac{-2}{-6}$ и $\frac{3}{9}$. Од $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9}$ следува дека дадените вектори се колинеарни. ♦



Задачи за самостојна работа

- Најди го координатното претставување на векторскиот производ на векторите:
а) $\vec{a} = (0, 1, 0)$ и $\vec{b} = (-2, 1, 3)$; б) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$;
- Дадени се векторите $\vec{a} = (3, -1, -2)$ и $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Најди ги координатите на векторите:
а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; в) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$.
- Пресметај го синусот од аголот меѓу векторите $\vec{a} = (2, -2, 1)$ и $\vec{b} = (2, 3, 6)$.
- Пресметај ја плоштината на паралелограмот ABCD конструиран над векторите $\vec{AB} = (2, 3, -1)$ и $\vec{AD} = (-3, -1, 1)$.
- Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $\vec{AB} = (-3, -5, 8)$ и $\vec{AC} = (3, -2, 6)$.
- Најди единичен вектор нормален на векторите $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
- Најди вектор $\vec{x}$ нормален на векторите $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$ кој го задоволува условот $\vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
- За кои вредности на x и y , векторите $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + y\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + x\vec{j} + 6\vec{k}$ се колинеарни?

2.12. Мешан производ на три вектори

Решавањето на бројни геометриски задачи значително се олеснува со воведувањето на мешаниот производ на три вектори, којшто има интересна геометриска интерпретација.

2.12.1. Дефиниција и геометриска интерпретација на мешан производ на три вектори

Дефиниција 1. Мешан производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е скаларниот производ на векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$; означи $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Пример 1. За да се пресмета мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, коишто претставуваат десна тројка вектори и $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ и $|\vec{c}| = 8$, се постапува на следниов начин:

Бидејќи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуваат десна тројка вектори, векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ имаат иста насока, па според тоа имаме

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 90^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 = 120. \blacklozenge$$

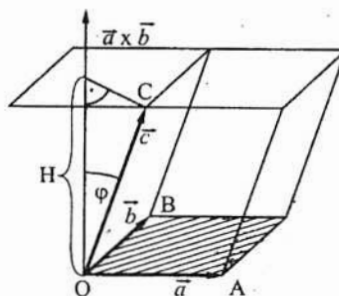
Следнава теорема дава геометриска интерпретација на мешаниот производ.

Теорема 1. Мешан производ на три некопланарни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е број чијашто апсолутната вредност е еднаква на волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$ и $(OC) \in \vec{c}$. Знакот на мешаниот производ е позитивен ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е десна тројка вектори, а негативен ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е лева тројка вектори.

Доказ. Нека $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е десна тројка вектори. Да го конструирме паралелопипедот над векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$ и $(OC) \in \vec{c}$ и да го означиме со φ аголот меѓу векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ (црт. 1). Тогаш од дефиницијата за скаларен производ имаме $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi$.

Знаеме дека должината на векторскиот производ $\vec{a} \times \vec{b}$ е бројно еднаква на плоштината S на паралелограмот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b}$, а тој пак е основа на конструираниот паралелопипед. Од друга страна, производот $|\vec{c}| \cos \varphi$ по апсолутна вредност е еднаков на висината H спуштена кон основата S на паралелопипедот. Оттука за волуменот V на паралелопипедот добиваме

$$V = S \cdot H = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$



црт. 1

Според тоа, знакот на мешаниот производ зависи од знакот на изразот $\cos \varphi$, односно од аголот меѓу векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$. Притоа $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} > 0$ ако и само ако $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, додека $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} < 0$ ако и само ако $180^\circ > \varphi > 90^\circ$. Бидејќи векторот $\vec{a} \times \vec{b}$ е нормален на рамнината R во која лежат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, може да заклучиме дека $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} > 0$ ако и само ако векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ се од иста страна на рамнината R , додека $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} < 0$ ако и само ако векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ се од различни страни на рамнината R . Оттука добиваме дека $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} > 0$ ако и само ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е десна тројка вектори, а $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} < 0$ ако и само ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е лева тројка вектори. ■

Имајќи го предвид геометриското значење на мешаниот производ, може да заклучиме дека мешаниот производ на три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е еднаков на нула, односно $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ ако и само ако е исполнет кој било од следните услови:

- ✓ еден од векторите е нултиот вектор,
- ✓ трите вектори се компланарни.

Според тоа, **услов за компланарност** на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ гласи:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0. \quad (1)$$

Задача 1. Пресметај го волуменот на паралелепипедот определен со векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ кои имаат еднакви должини и $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = 60^\circ$.

Бидејќи плоштината на основата S и висината H на паралелепипедот се еднакви на

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad H = |\vec{c}| \cos(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}| \cos 60^\circ = \frac{|\vec{a}|}{2},$$

бараниот волумен изнесува

$$V = S \cdot H = \frac{|\vec{a}|^3 \sqrt{3}}{4}. \quad \blacklozenge$$



Задачи за самостојна работа

1. Векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, кои зафаќаат агол од 60° . Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, ако $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$ и $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.
2. Пресметај го волуменот на коцка со основен раб $a = 3$.
3. Пресметај го волуменот на правоаголен паралелепипед со рабови $a = 3$, $b = 4$, $c = 7$.
4. Дадени се три единични вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Ако $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = \alpha$, тогаш $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Докажи!

2.12.2. Пресметување на мешан производ со помош на координати

Теорема 1. Ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, тогаш $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Доказ. Од $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$ добиваме дека

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot (c_x, c_y, c_z) = \\ &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \text{ Значи } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

Последица 1. Условот за колинеарност на векторите $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и

$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z), \text{ гласи } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 3. Волуменот на паралелепипедот конструиран над векторите $\vec{a} = (1, -1, 4)$, $\vec{b} = (1, -3, 1)$ и $\vec{c} = (3, 2, -5)$ изнесува

$$V = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 49. \blacklozenge$$

Пример 4. Вредноста на параметарот p за којашто векторите $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (p, 1, 0)$ и $\vec{c} = (1, 4, 8)$ се компланарни може да се добие од условот за компланарност на три вектори.

Имено, $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ p & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ за $p = -\frac{1}{4}$. $\blacklozenge$

Како последица од теорема 1, со примена на својствата на детерминантите се добиваат следниве равенства:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}].$$



Задачи за самостојна работа

1. Дадени се векторите $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$ и $\vec{c} = (1, 2, 1)$. Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.
2. Пресметај го волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a} = (1, -3, 1)$, $(OB) \in \vec{b} = (2, 1, -3)$ и $(OC) \in \vec{c} = (1, 2, 1)$.
3. Дали векторите $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (1, 2, 2)$ и $\vec{c} = (9, 14, 16)$ се компланарни?
4. Пресметај ја висината на паралелопипедот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $(OB) \in \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ и $(OC) \in \vec{c} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, ако неговата основа е паралелограмот над векторите $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b}$.
5. Најди ја вредноста на параметарот t за којашто векторите $\vec{a} = (t, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, t, -1)$ и $\vec{c} = (1, 1, t)$ се компланарни.
6. Најди ја вредноста на параметарот p за којашто векторите $\vec{a} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = p\hat{i} + \hat{j}$ и $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, се компланарни.

Задачи за вежбање

1. Дадени се векторите $\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$ и $\vec{c} = -\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$. Најди вектор $\vec{d}$ така што векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ да формираат четириаголник.
2. Дадени се векторите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$ и $(OC) \in \vec{c}$, каде што OC е тежишна линија на триаголникот AOB . Разложи го
а) векторот $\vec{c}$ по векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) векторот $\vec{a}$ по векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$.
3. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Изрази ги векторите $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EF}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.
4. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Покажи дека $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.
5. Во тетраедарот $OABC$ дадени се рабовите $(OA) \in \vec{a}$, $(OB) \in \vec{b}$ и $(OC) \in \vec{c}$. Со помош на дадените вектори изрази ги преостанатите рабови на тетраедарот, тежишната линија $\overrightarrow{CM}$ на страната ABC и векторот $\overrightarrow{OT}$, каде што T е тежиштето на страната ABC .

6. Докажи дека векторите $\vec{q}\vec{a} - \vec{p}\vec{b}$, $\vec{r}\vec{b} - \vec{q}\vec{c}$, $\vec{p}\vec{c} - \vec{r}\vec{a}$ се компланарни за произволни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и произволни скалари p , q , r .

7. Разложи го векторот $\vec{x} = \vec{a}\vec{r} + \vec{b}\vec{q}$ по векторите $\vec{y} = \vec{b}\vec{r} + \vec{q}$ и $\vec{z} = \vec{c}\vec{r} + \vec{d}\vec{q}$, каде што $\vec{r}$ и $\vec{q}$ се дадени единични вектори.

8. Разложи го векторот $\vec{d} = (3, -3, 4)$ по векторите $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$ и $\vec{c} = (1, 2, 0)$.

9. Нека се дадени векторите $\vec{a} = x\vec{r} - 4\vec{q} - 6\vec{r}$ и $\vec{b} = -3\vec{r} + 2\vec{q} + y\vec{r}$, каде што $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ не се компланарни. Најди ги вредностите на параметрите x и y за кои векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ќе бидат колинеарни.

10. Испитај дали се линеарно зависни или независни следниве вектори:

а) $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q} + 3\vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} - 2\vec{r}$,

б) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + \vec{r}$,

ако $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ не се компланарни вектори.

11. Најди ја алгебарската вредност на проекција на векторот $\vec{a} = (1, 2, 2)$ врз векторот $\vec{c} = (1, 0, 1)$.

12. Најди ги: модулот на векторот $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, соодветниот единичен вектор и косинусите од аглиите што ги зафаќа векторот $\vec{a}$ со координатните оски.

13. Најди го бројот k , ако $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + k$.

14. Најди вектор $\vec{c}$ колинеарен со векторот $\vec{a} + \vec{b}$, ако $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 18$, $|\vec{b}| = 2$.

15. Дадени се векторите $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (1, 2, -2)$. Најди ги векторските производи

а) $\vec{a} \times \vec{b}$,

б) $\vec{b} \times \vec{a}$,

в) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a})$.

16. Дадени се векторите $\vec{a} = 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Најди вектор $\vec{d}$ кој ги задоволува условите $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.

17. Нека се дадени два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни. Покажи дека векторите $\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ се заемно нормални.

18. Дадени се векторите $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$. Најди вектор $\vec{p}$ така што $\vec{p} \cdot \vec{a} = 3$ и $\vec{p} \times \vec{b} = \vec{c}$.

19. Дадени се векторите $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Најди ги координатните претставувања на векторите $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$.

20. Најди ги плоштината на паралелограмот OABC и аголот меѓу векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

21. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $(AB) \in \vec{a} = (-2, 3, -3)$ и $(AC) \in \vec{b} = (1, 3, -5)$.

22. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се формирани со векторите $(AC) \in \vec{a} = (3, 1, -2)$ и $(BD) \in \vec{b} = (1, -3, 4)$.

23. Дадени се векторите $\vec{a} = (1, 2x, -3)$ и $\vec{b} = (2, x, -2x)$. За кои вредности на x дадените вектори се меѓусебно

а) нормални;

б) паралелни?

24. Дадени се векторите $\overrightarrow{OM} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$. Покажи дека векторите $\overrightarrow{MN}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$ се компланарни.

25. За која вредност на параметарот t векторите $\vec{a} = (\log(t-2), -2, 6)$, $\vec{b} = (t, -2, 5)$ и $\vec{c} = (0, -1, 3)$ се компланарни?

26. Пресметај го волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a} = (1, -1, 1)$, $(OB) \in \vec{b} = (2, 2, -1)$ и $(OC) \in \vec{c} = (3, -1, 0)$.

27. Пресметај ја висината на паралелопипедот конструиран над векторите $(OA) \in \vec{a} = (3, -2, 5)$, $(OB) \in \vec{b} = (1, -1, 4)$ и $(OC) \in \vec{c} = (1, -3, 1)$, ако негова основа е паралелограмот над векторите $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b}$.

3.

ТОЧКА, ПРАВА И РАМНИНА ВО ПРОСТОР

Основна цел на аналитичката геометрија, како математичка дисциплина, е воведувањето концепти за алгебарско задавање на геометриските објекти. Така на пример, во даден координатен систем точките и векторите се задаваат со нивните координати, а кривите со нивните равенки. На тој начин е овозможено геометриски задачи да се решаваат со алгебарски методи и обратно, алгебарски задачи да се интерпретираат геометриски. Во оваа глава ќе разгледуваме точки, прави и рамнини во просторот. Ќе ја определуваме нивната положба во однос на избран правоаголен Декартов координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.1. Точка во простор

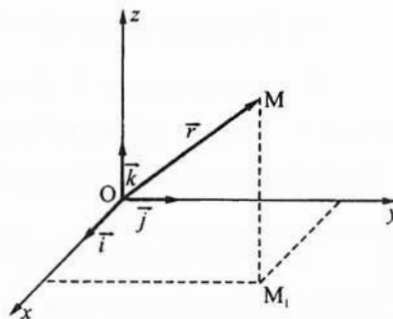
Во ова заглавие ќе воведеме аналитички начин на задавање на еден од основните поими во геометријата, поимот точка. Со координатното претставување на точките во просторот може лесно да го пресметаме растојанието меѓу две точки, како и да ја определеме положбата на точка во просторот која дадена отсечка ја дели во даден однос.

3.1.1. Растојание меѓу две точки

Со помош на аналитички метод ќе го решиме проблемот на пресметување на растојание меѓу две точки во просторот.

А) Координати на точка

Нека во просторот е избран правоаголен Декартов координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и нека M е произволна точка. Векторот $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ со почеток во координатниот почеток и крај во точката M се нарекува **радиусвектор** на точката M (црт. 1). Положбата на точката M во просторот е напoлно определена со нејзиниот радиусвектор $\vec{r}$, а тој пак е напoлно определен со своите координати во однос на избраниот координатен систем. Точката M како крајна точка на векторот $\vec{r}$ ќе биде определена со истите координати. Според тоа, ако $\vec{r} = (x, y, z)$, тогаш координатите x, y, z на векторот $\vec{r}$ ги нарекуваме координати на точката M . Направената дискусија ја допушта следнава дефиниција:



црт. 1

Дефиниција 1. Во избран координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, координати на точка M се нарекуваат координатите на нејзиниот радиусвектор $\vec{r} = (x, y, z)$ и се пишува $M(x, y, z)$. Притоа x се нарекува **прва координата** или **апсциса**, y **втора координата** или **ордината**, а z **трета координата** или **апликата** на точката M .

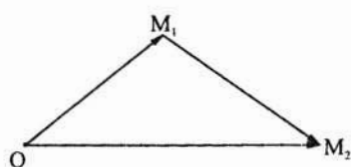
Пример 1. Точката M чијшто радиусвектор е $\vec{r} = (-1, 0, 3)$ има координати $M(-1, 0, 3)$. ♦

Б) Координатно претставување на вектор зададен со своите крајни точки

Еден вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ е напoлно определен со своите крајни точки M_1 и M_2 .

Теорема 1. Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се почетната и крајната точка на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, соодветно тогаш $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Доказ. Бидејќи координатите на една точка во просторот се еднакви со координатите на нејзиниот радиусвектор, од $M_1(x_1, y_1, z_1)$ следува дека нејзиниот радиусвектор е $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1)$. Слично, од $M_2(x_2, y_2, z_2)$ добиваме дека нејзиниот радиусвектор е



$\overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2)$ (црт. 2). Од равенството

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2}$$

следува дека

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

Според тоа

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \blacksquare$$

Пример 2. Координатното претставување на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, за којшто $M_1(1, -2, 0)$ и $M_2(3, 0, -1)$ е $\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 1, 0 - (-2), -1 - 0) = (2, 2, -1)$. ♦

В) Растојание меѓу две точки

Под растојание d меѓу две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ го подразбираме мерниот број на должината на отсечката M_1M_2 . Од друга страна, должината на отсечката M_1M_2 е всушност, должината на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Теорема 2. Растојанието d меѓу дадени точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ е определено со формулата $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Доказ. Ако за векторот $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ја примениме формулата за пресметување должина на вектор зададен со своите координати, добиваме

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Како што веќе рековме, бараното растојание d меѓу дадените точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ е еднакво на должината на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$, т.е. $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$. Според тоа

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \blacksquare$$

Пример 3. Растојанието меѓу точките $M_1(3, 0, -2)$ и $M_2(-1, 5, 1)$ изнесува

$$d = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (5 - 0)^2 + (1 - (-2))^2} = 5\sqrt{2}. \blacklozenge$$

Пример 4. За да ги најдеме должините на страните на триаголникот ABC , каде што $A(2, 1, \sqrt{2})$, $B(1, 0, 0)$ и $C(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$, доволно е да ги пресметаме растојанијата меѓу неговите темиња, т.е:

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = d_{AB} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - \sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = d_{BC} = \sqrt{(1 + \sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - (-\sqrt{6}))^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = d_{AC} = \sqrt{(1 + \sqrt{3} - 2)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 + (-\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = 4. \blacklozenge$$



Задачи за самостојна работа

1. Дадени се радиусвекторите на точките A, B, C, D и E : $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{OD} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OE} = 2\vec{j} - \vec{k}$. Запиши ги координатите на точките A, B, C, D и E .

2. Најди ги координатите на ортогоналните проекции на точките $A(1, -2, 4)$, $B(-2, 3, 1)$ и $C(1, 3, 2)$ врз

а) xy – рамнината;

б) yz – рамнината;

в) xz – рамнината.

3. Дадени се точките $A(2, 1, 0)$, $B(3, 3, 2)$, $C(0, 2, 2)$ и $D(3, 4, -1)$. Запиши ги координатите на векторите

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AS}$; д) $3\overrightarrow{BD}$; е) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$; ж) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

4. Нека $(AB) \in \vec{a} = (2, -2, 3)$ и нека $A(0, 1, -4)$. Запиши ги координатите на точката B .

5. Пресметај го растојанието d меѓу точките:

а) $M_1(1, -3, 7)$ и $M_2(2, 6, 0)$;

б) $M_1(0, 2, 1)$ и $M_2(0, -2, -1)$;

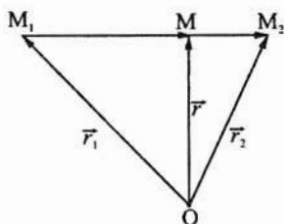
в) $M_1(-1, -2, 3)$ и $M_2(0, 2, 4)$;

г) $M_1(1, 0, 3)$ и $M_2(7, 0, -2)$.

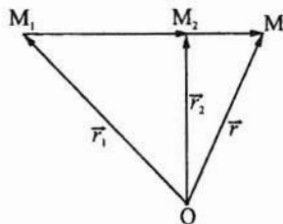
6. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC , ако $A(1, -3, -1)$, $B(3, -5, 0)$ и $C(0, -5, 7)$.

3.1.2. Делење на отсечка во даден однос

Нека M_1 и M_2 се две различни точки од една права. Произволна точка M од правата



црт. 1



црт. 2

M_1M_2 може да припаѓа или да не припаѓа на отсечката M_1M_2 (црт. 1 и црт. 2). Во двата случаи векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ се колинеарни, па постои нивниот количник, односно $\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}} = q$. Како што знаеме количникот q е определен со формулата

$q = \frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}$, ако векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ имаат иста насока, и

$q = -\frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\overrightarrow{MM_2}|}$, ако векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ имаат спротивни насоки.

✓ Ако $q > 0$, тогаш точката M лежи на отсечката M_1M_2 . Во тој случај велиме дека точката M ја дели отсечката M_1M_2 со **внатрешна поделба** во однос q .

✓ Ако $q < 0$, тогаш точката M не лежи на отсечката M_1M_2 . Во тој случај велиме дека точката M ја дели отсечката M_1M_2 со **надворешна поделба** во однос q .

Следната теорема ни го открива радиусвекторот, а воедно и координатите на точката M изразени преку радиусвекторите, односно координатите на точките M_1 , M_2 и бројот q .

Теорема 1. Нека се дадени две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Ако точката M ја дели отсечката M_1M_2 со внатрешна поделба во однос q , тогаш

$$M\left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}, \frac{y_1 + qy_2}{1+q}, \frac{z_1 + qz_2}{1+q}\right).$$

Доказ. Да ги означиме со $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ радиусвекторите на точките M_1 и M_2 , а со $\vec{r}$ радиусвекторот на точката M . Да забележиме дека $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r} - \vec{r}_1$ и $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = \vec{r}_2 - \vec{r}$. Тогаш од $\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}} = q$ добиваме дека $\vec{r} - \vec{r}_1 = q(\vec{r}_2 - \vec{r})$. Според тоа радиусвекторот на точката M е определен со формулата

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + q\vec{r}_2}{1+q},$$

односно

$$\vec{r} = \left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}, \frac{y_1 + qy_2}{1+q}, \frac{z_1 + qz_2}{1+q} \right).$$

Оттука добиваме дека

$$M \left(\frac{x_1 + qx_2}{1+q}, \frac{y_1 + qy_2}{1+q}, \frac{z_1 + qz_2}{1+q} \right). \blacksquare$$

Ако точката M е средина на отсечката M_1M_2 тогаш $q=1$ и радиусвекторот на точката M е определен со релацијата

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}.$$

За координатите на средишната точка M на отсечката M_1M_2 имаме

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Пример 1. Координатите на точките P и Q кои отсечката AB ја делат на три еднакви дела, ако $A(3, -2, 1)$ и $B(0, 2, -5)$ се добиваат на следниов начин.

Од условот на задачата имаме $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = 2$. Тогаш од Теорема 1 следува дека

$$P \left(2, -\frac{2}{3}, -1 \right) \text{ и } Q \left(1, \frac{2}{3}, -3 \right). \spadesuit$$

Пример 2. Нека е даден триаголникот ABC чии темиња имаат координати $A(3, -2, 1)$, $B(4, 0, 3)$ и $C(-2, 6, 5)$. Ако се бараат координатите на тежиштето на триаголникот, тогаш на нивно определување го користиме условот дека тежиштето ја дели секоја од тежишните линии AA_1 , BB_1 и CC_1 во однос 2.

$$\text{Од } x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1, \quad y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3 \quad \text{и} \quad z_{A_1} = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

следва дека $A_1(1, 3, 4)$. Тогаш $x_T = \frac{x_A + 2x_{A_1}}{1+2} = \frac{3 + 2 \cdot 1}{3} = \frac{5}{3}$, $y_T = \frac{y_A + 2y_{A_1}}{1+2} = \frac{-2 + 2 \cdot 3}{3} = \frac{4}{3}$ и

$$z_T = \frac{z_A + 2z_{A_1}}{1+2} = \frac{1 + 2 \cdot 4}{3} = 3, \text{ па според тоа } T \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 3 \right). \spadesuit$$



Задачи за самостојна работа

1. Најди ги координатите на средината $M(x, y, z)$ на отсечката AB , ако
а) $A(3, 6, 0)$ и $B(1, 4, 2)$; б) $A(-1, 0, 1)$ и $B(1, 0, -1)$.

2. Дадени се точките $A(2, 6, 3)$ и $M(6, 2, 0)$. Запиши ги координатите на точката B ако M е средина на отсечката AB .

3. Дадени се точките $A(3,1,1)$ и $B(8,35)$. Најди ги координатите на точката M којашто отсечката AB ја дели во однос

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{3}{2}$.

4. Дадени се точките $A(-3,-2,-3)$ и $B(7,3,0)$. Запиши ги координатите на точките кои отсечката AB ја делат на пет еднакви делови.

5. Нека $A(-2,4,-12)$, $B(19,-2,-15)$ и $C(1,4,18)$ се темиња на триаголник. Најди ги координатите на средините на неговите страни.

6. Запиши ги координатите на тежиштето на триаголникот ABC , ако $A(2,0,3)$, $B(5,-1,3)$ и $C(1,2,0)$.

7. Дадени се точките $A(2,6,1)$, $B(0,3,4)$ и $T(2,-1,3)$. Најди ги координатите на точката C , ако T е тежиште на триаголникот ABC .

3.2. Рамнина

Положбата на една рамнина во просторот може да се определи на повеќе начини. На пример, една рамнина може да биде зададена со три свои неколинеарни точки, или таа да биде нормална на некој вектор и да се наоѓа на определено растојание од координатниот почеток. Исто така, една рамнина е определена со една точка и права што не минува низ дадената точка, како и со две прави што се сечат. Оттука произлегува заклучокот дека една иста рамнина може да ја зададеме аналитички на различни начини.

3.2.1. Нормална равенка на рамнина

Нека P е нормалната проекција на координатниот почеток врз разгледуваната рамнина, а $\vec{n}_0$ единичен вектор нормален на рамнината. Тогаш, со векторот $\vec{n}_0$ и точката P напълно е определена положбата на рамнината во просторот: како рамнина што ја содржи точката P и е нормална на векторот $\vec{n}_0$. Бројот $|\vec{OP}| = p$ претставува растојание на координатниот почеток од рамнината. Притоа, ако $p=0$ рамнината минува низ координатниот почеток, додека, ако $p>0$ тогаш рамнината е на растојание p од координатниот почеток во насока на векторот $\vec{n}_0$.

Теорема 1. Радиусвекторот $\vec{r}$ на произволна точка M од рамнината R која е на растојание p од координатниот почеток и е нормална на векторот $\vec{n}_0$, ја задоволува векторската равенка $\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0$.

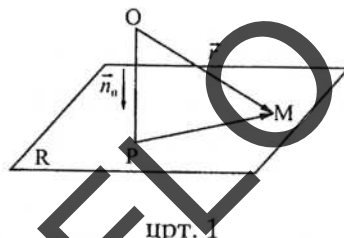
Доказ. Нека $\vec{r}$ е радиусекторот на произволна точка M од рамнината R (црт. 1). Бидејќи векторот $\vec{n}_0$ е нормален на дадената рамнина, тој е нормален и на векторот $\overrightarrow{PM}$, каде што P е ортогоналната проекција на координатниот почеток на рамнината R . Тогаш

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n}_0 = 0. \quad (1)$$

Од триаголникот MOP имаме $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - p\vec{n}_0$, од каде што со замена во (1) добиваме $(\vec{r} - p\vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = 0$. Користејќи ги својствата на скаларниот производ и фактот дека $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1$, добиваме

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0. \quad (2)$$

Равенката (2) се нарекува **нормална векторска равенка на рамнина**.



Теорема 2. Секоја равенка од облик (2) каде што $\vec{n}_0$ е единичен вектор и p ненегативен скалар, претставува рамнина.

Доказ. Нека P е точка во просторот таква што $(OP) = p\vec{n}_0$ и нека $\vec{r}$ е радиусекторот на произволна точка M која ја задоволува равенката (2). Тогаш $\overrightarrow{PM} = \vec{r} - p\vec{n}_0$ и $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = p\vec{n}_0 \cdot (\vec{r} - p\vec{n}_0) = p(\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p)$. Бидејќи векторот $\vec{r}$ ја задоволува равенката (2) имаме

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = 0,$$

од каде што заклучуваме дека векторите $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PM}$ се заемно нормални. Според тоа, сите точки кои ја задоволуваат равенката (2) припаѓаат на една иста рамнина, нормална на векторот (OP) во точката P .

Од теорема 1 и теорема 2 непосредно може да заклучиме дека на рамнината нормална на векторот $\vec{n}_0$ на растојание $p \geq 0$ од координатниот почеток, припаѓаат сите точки чии радиусектори ја задоволуваат равенката (2) и само тие точки.

Пример 1. Нека $A(2,1,1)$, $B(-3,1,1+\sqrt{6})$ и $C(2,5,1)$ се темиња на даден триаголник ABC . Тогаш може да се најде равенката на рамнината која е паралелна на рамнината на триаголникот и е на растојание од 10 единици од координатниот почеток.

Векторскиот производ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ е вектор нормален на рамнината на триаголникот ABC , па секоја рамнина нормална на тој вектор е паралелна на рамнината на триаголникот ABC . Нека $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Тогаш

$$\vec{n} = -8\sqrt{6}\vec{i} - 20\vec{k}, \quad |\vec{n}| = 28, \quad \vec{n}_0 = -\frac{2\sqrt{6}}{7}\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{k}.$$

$$\text{Бараната равенка гласи: } \vec{r} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\vec{i} - \frac{5}{7}\vec{k} \right) - 10 = 0.$$

За векторот $-\vec{n}_0$, односно за векторот $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$ добиваме равенка на друга рамнина (од другата страна на координатниот почеток) што ги исполнува условите од задачата, која

гласи: $\vec{r} \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\vec{i} + \frac{5}{7}\vec{k} \right) - 10 = 0. \spadesuit$

Нека α, β, γ се аглие што ги зафаќа единичниот вектор $\vec{n}_0$ со координатните вектори, соодветно.

Теорема 3. Равенката $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ ја претставува рамнината која е нормална на единичниот вектор $\vec{n}_0$, на растојание p од координатниот почеток, т.е. точките $M(x, y, z)$ од оваа рамнина и само тие ја задоволуваат равенката.

Доказ. Радиусвекторот на произволна точка $M(x, y, z)$ од рамнината е $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Согласно со теорема 1, нормалната векторска равенка на рамнината гласи

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0.$$

За разгледуваната рамнина имаме

$$(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})(\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) - p = 0,$$

т.е.

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \blacksquare \quad (3)$$

Равенката (3) се нарекува **нормална скаларна равенка на рамнина**.

Пример 2. Равенката $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 = 0$ ја претставува рамнината која е нормална на единичниот вектор $\vec{n}_0 = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, на растојание $p = 4$ од координатниот почеток, т.е. точките од оваа рамнина и само тие ја задоволуваат дадената равенка. $\spadesuit$



Задачи за самостојна работа

1. Најди ја нормалната векторска равенка на рамнината која е нормална на векторот $\vec{n} = (2, -2, 1)$, на растојание 5 од координатниот почеток.
2. Запиши ја нормалната векторска равенка на рамнината, ако точката $P(3, 4, 0)$ е ортогонална проекција на координатниот почеток врз рамнината.
3. Најди ја нормалната векторска равенка на рамнината која е паралелна на векторите $\vec{a} = (2, 5, 0)$ и $\vec{b} = (-3, 0, 1)$, на растојание 12 од координатниот почеток.
4. Која од следниве равенки на рамнина претставува нормална скаларна равенка на рамнина:

а) $3x - 2y + z + 7 = 0;$

б) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z - 3 = 0;$

в) $\frac{2}{3}x - \frac{4}{7}y - 2z - 11 = 0?$

5. Најди ги нормалниот вектор и растојанието од координатниот почеток на рамнините:

$$\text{а) } \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y - \frac{\sqrt{5}}{4}z - 3 = 0; \quad \text{б) } \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 33 = 0; \quad \text{в) } \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{2\sqrt{5}}{5}z + 10 = 0.$$

3.2.2. Општа равенка на рамнина

Теорема 1. Равенката

$$\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0, \quad (1)$$

каде што $\vec{n}$ е произволен ненулта вектор, а D произволен скалар, претставува рамнина.

Доказ. Ако равенката (1) ја поделеме со $\pm|\vec{n}|$ ја добиваме еквивалентната равенка

$$\vec{r} \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} + \frac{D}{\pm|\vec{n}|} = 0. \quad (2)$$

Ако знакот пред $\vec{n}$ го избереме спротивен од знакот на D , тогаш согласно со теорема 2, од претходното поглавје равенката (2) претставува рамнина. Притоа $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|}$ и

$-p = \frac{D}{\pm|\vec{n}|}$, каде што $\vec{n}_0$ е единичен вектор нормален на рамнината, насочен од координатниот почеток кон рамнината, а p е растојанието од координатниот почеток од рамнината. ■

Равенката (2) се нарекува **општа векторска равенка на рамнина**.

Ако $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{r} = (x, y, z)$, тогаш равенката (4) добива облик

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3)$$

Равенката (3) се нарекува **општа скаларна равенка на рамнина**.

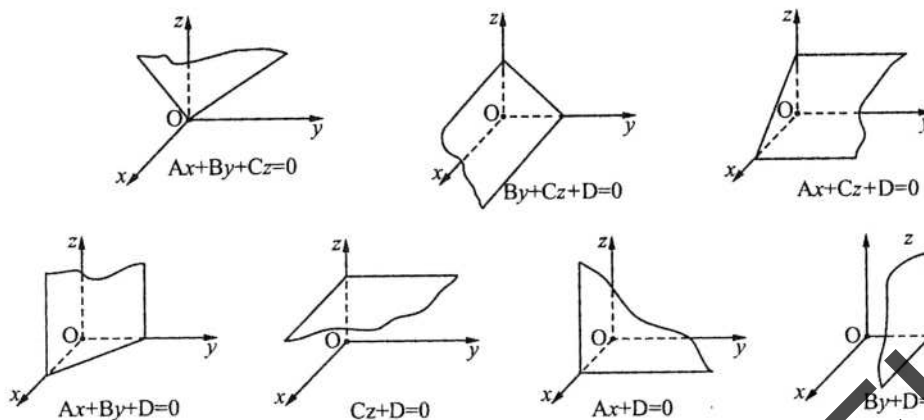
Пример 1. За да се доведе во нормален векторски облик равенката на рамнина зададена со општа скаларна равенка $2x + 9y + 2\sqrt{21}z + 26 = 0$ се воочува нормалниот вектор $\vec{n}$ на рамнината, $\vec{n} = 2\vec{i} + 9\vec{j} + 2\sqrt{21}\vec{k}$, и се наоѓа неговиот модул $|\vec{n}| = 13$. Бидејќи $D = 26$, за $\vec{n}_0$ и p се добива $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{13}$, $-p = \frac{26}{13} = 2$.

Според тоа, нормалниот векторски облик на дадената рамнина гласи

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{13}\vec{i} + \frac{9}{13}\vec{j} + \frac{2}{13}\sqrt{21}\vec{k} \right) + 2 = 0. \blacklozenge$$

Да разгледаме некои специјални случаи на равенката на рамнина (3) (црт. 1).

✓ Ако $D = 0$, тогаш равенката на рамнината добива облик $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$, од каде што заклучуваме дека радиусекторот на произволна точка од рамнината е нормален на векторот $\vec{n}$. Тоа значи дека рамнината минува низ координатниот почеток.



црт. 1

✓ Ако $A=0$, тогаш $\vec{n} = B\vec{j} + C\vec{k}$, од каде што заклучуваме дека векторот $\vec{n}$ е компланарен со векторите $\vec{j}$ и $\vec{k}$, односно тој е нормален на x -оската. Во тој случај рамнината е паралелна на x -оската. Слично на ова, ако $B=0$ рамнината е паралелна на y -оската, додека ако $C=0$ тогаш рамнината е паралелна со z -оската.

✓ Ако $D=A=0$ тогаш рамнината минува низ координатниот почеток и е паралелна на x -оската, што значи ја содржи x -оската. Слично, ако $D=B=0$ тогаш рамнината ја содржи y -оската, додека ако $D=C=0$ тогаш рамнината ја содржи z -оската.

✓ Ако $A=B=0$ тогаш рамнината е паралелна со x -оската и y -оската, односно рамнината е паралелна со xy рамнината. Ако $A=C=0$ тогаш рамнината е паралелна со x -оската и z -оската, односно рамнината е паралелна со xz рамнината, додека ако $B=C=0$ тогаш рамнината е паралелна со y -оската и z -оската, односно рамнината е паралелна со yz рамнината.

✓ Во случајот $A=B=C=0$ равенката (3) не претставува рамнина бидејќи во случајот $D=0$, го претставува целиот простор, а за $D \neq 0$ равенката е противречна.

✓ Ако $A=B=D=0$ рамнината се совпаѓа со xy рамнината. Слично на ова, ако $A=C=D=0$ рамнината се совпаѓа со xz рамнината, додека ако $B=C=D=0$ рамнината се совпаѓа со yz рамнината.

Пример 2. Рамнината зададена со равенката $x+2y=0$ ја содржи z -оската, во смисла секоја точка од z -оската, $M(0,0,z)$ ја задоволува равенката на рамнина за која $\vec{n} = (1,2,0)$ е нормален вектор.



Задачи за самостојна работа

1. Доведи ги во нормален векторски облик следниве равенки на рамнина:

а) $2x + 6y + 3z - 1 = 0$;

б) $2x - 2y + z = 12$.

2. Најди ги должината и косинусите на правците на нормалата спуштена од координатниот почеток на рамнините

а) $2x - 5y + 7z - 36 = 0$;

б) $-x + y = 16$;

в) $3y + z = 16$.

3. Ако е познато дека отсечката АВ, каде што $A(4,12,z)$, $B(0,1,7)$, е паралелна на рамнината $3x - 2y + z = 12$, најди ја непознатата координата z на точката A .

4. Покажи дека рамнините зададени со равенките $2x + 10y - 11z = -6$, $28x - 10y - 4z = 11$, $8x + 40y - 44z = 15$, $3x + 6y + 6z + 1 = 0$, $14x - 5y - 2z + 3 = 0$ и $x + 2y + 2z - 5 = 0$ заградуваат правоаголен паралелопипед во чија внатрешност лежи координатниот почеток.

5. Што може да се каже за положбата на рамнините зададени со равенките:

а) $z - 4 = 0$;

б) $3x - 5 = 0$;

в) $y - 8 = 0$;

г) $x + y + z = 0$;

г) $x + 2z - 1 = 0$;

д) $y + z - 3 = 0$;

ф) $2x + y - 5 = 0$;

е) $x + 2y = 0$?

3.2.3. Сегментна равенка на рамнина

Нека е дадена рамнина R со својата општа равенка

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

каде што A , B , C и D се сите различни од нула. Произволна точка P на x -оската има координати $(a,0,0)$, каде што a е реален број (црт. 1). Точката P лежи во рамнината R ако и само ако

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0,$$

т.е. ако

$$a = -\frac{D}{A}$$

Бројот a е **сегмент** или **отсечок** на x -оската отсечен со рамнината R . Слично ги добиваме отсечоките b и c отсечени со рамнината на y -оската и z -оската.

$$b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

црт. 1

Ако коефициентите A , B и C ги изразиме преку D , a , b и c , ја добиваме равенката на рамнината во обликот

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0.$$

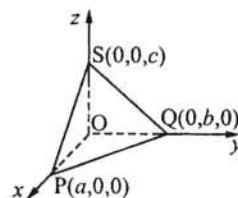
Бидејќи D е различно од нула, последната равенка може да ја запишеме во обликот:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

наречен **сегментен облик на равенка на рамнина**.

Пример 1. За да се добие сегментниот облик на равенката на рамнина $5x - 2y + 7z - 3 = 0$ се зема $y = z = 0$ во дадената равенка на рамнина и се добива отсечокот на x -оската: $5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$; значи $a = \frac{3}{5}$.

Слично, за $x = z = 0$ добиваме $b = -\frac{3}{2}$, а за $x = y = 0$ добиваме $c = \frac{3}{7}$. Сегментниот облик на равенката на рамнината гласи:



$$\frac{x}{\frac{3}{5}} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} + \frac{z}{\frac{3}{7}} = 1. \blacklozenge$$

Пример 2. Нека се дадени отсекоците на координатните оски $a=6$, $b=-12$ и $c=6$, со одредена рамнина и нека се бараат:

- равенката на рамнината,
- косинусите на правците на нормалата на рамнината и растојанието од координатниот почеток до рамнината.

За одговорот под а) знаејќи ги отсекоците на рамнината на координатните оски, може да ја запишеме нејзината сегментна равенка:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{6} = 1.$$

За одговорот б) се ослободуваме од именителите на равенката под а) и ја добиваме општата скаларна равенка на рамнината:

$$10x - 5y + 10z - 60 = 0.$$

Тогаш $\vec{n} = (10, -5, 10)$, од каде што добиваме дека $|\vec{n}| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 10^2} = 15$. Нормалниот скаларен облик на равенката на дадената рамнина гласи

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 = 0.$$

За косинусите на правците на нормалата на рамнината имаме:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \cos \gamma = \frac{2}{3},$$

а растојанието од координатниот почеток до рамнината е $p = 4$. $\blacklozenge$



Задачи за самостојна работа

- Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на рамнина:
 - $3x - 2y - 4z + 12 = 0$,
 - $3x + 4y - 2z = -1$;
 - $2x - 3y + z - 1 = 0$.
- Најди ги сегментите на координатните оски што ги отсекува рамнината $2x + y - 2z - 4 = 0$.
- Најди ја вредноста на параметарот k за којшто збирот на сегментите на координатните оски што ги отсекува рамнината $2x + 5ky - 3z - 30 = 0$ е еднаков на 10.
- Најди ја вредноста на параметарот k за којшто производот на сегментите на координатните оски што ги отсекува рамнината $12x + 5y - z - 12k = 0$ е еднаков на $\frac{1}{5}$.
- Пресметај го волуменот на тетраедарот ограничен со координатните рамнини и со рамнината $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

3.2.4. Равенка на рамнина низ дадена точка

Нека се дадени точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и вектор $\vec{n}(A, B, C)$. Следнава теорема ја утврдува равенката на рамнината којашто е нормална на векторот $\vec{n}$ и минува низ точката M_1 ; $\vec{r}$ го означува радиусвекторот на произволна точка од рамнината.

Теорема 1. Рамнината којашто е нормална на векторот $\vec{n}$ и минува низ точката M_1 е определена со равенката

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0, \quad (1)$$

каде што $\vec{r}_1$ е радиусвекторот на точката M_1 .

Доказ. Нека M е произволна точка од рамнината R којашто е нормална на векторот $\vec{n}$ и минува низ точката M_1 (црт. 1). Векторот $\vec{n}$ е нормален на секој вектор од рамнината R , па тој е нормален и на векторот $\vec{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$, каде што $\vec{r}$ е радиусвекторот на точката M . Според тоа, важи равенството

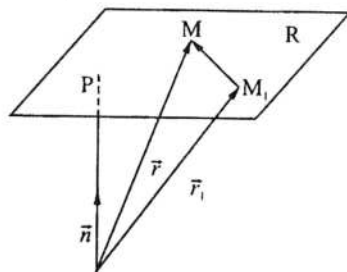
$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0.$$

Значи, радиусвекторот на секоја точка од рамнината R ја задоволува равенката (1). ■

Користејќи ги координатите на $\vec{n}(A, B, C)$, $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, равенката (1) може да ја запишеме во облик

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Пример 1. Равенката на рамнината која минува низ точката $M(3, 2, 1)$ и е нормална на координатниот вектор $\vec{i} = (1, 0, 0)$ гласи $1(x - 3) + 0(y - 2) + 0(z - 1) = 0$, т.е. $x - 3 = 0$. ♦



црт. 1



Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на рамнината којашто минува низ точката $M(-1, 4, 0)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = (3, 7, -1)$.
2. Запиши ја равенката на рамнината којашто минува низ точката $M(4, 5, 0)$ и е паралелна со рамнината $3x - 2y + 5z - 6 = 0$.
3. Запиши ја равенката на рамнината којашто минува низ точката $M(-2, 6, -4)$ и е паралелна со
 - а) xu – рамнината;
 - б) xz – рамнината;
 - в) yz – рамнината.

3.2.5 Равенка на рамнина низ три дадени точки

Нека се дадени три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Ќе ја определеме равенката на рамнината којашто минува низ трите дадени точки. Да ги означиме со $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$, радиусвекторите на точките M_1 , M_2 и M_3 , соодветно. Произволна точка M со радиусвектор $\vec{r}$ лежи во рамнината определена со точките M_1 , M_2 и M_3 ако и само ако векторите $\vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{r} - \vec{r}_2$ и $\vec{r} - \vec{r}_3$ се компланарни. Од друга страна од условот за компланарност на три вектори веќе знаеме дека векторите $\vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{r} - \vec{r}_2$ и $\vec{r} - \vec{r}_3$ се компланарни ако и само ако

$$[\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r} - \vec{r}_2, \vec{r} - \vec{r}_3] = 0,$$

т.е.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 1. Равенката на рамнината што минува низ точките $M_1(2,2,3)$, $M_2(-1,2,-2)$ и $M_3(3,1,1)$ гласи:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 3 \\ -1 - 2 & 2 - 2 & -2 - 3 \\ 3 - 2 & 1 - 2 & 1 - 3 \end{vmatrix} = 0,$$

или, во развиена форма,

$$5x + 11y - 3z - 23 = 0. \spadesuit$$



Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ точките $M_1(8,1,0)$, $M_2(3,-2,1)$ и $M_3(4,5,6)$.

2. Провери дали точките A, B, C и D лежат во една иста рамнина, ако

а) $A(0,2,-4)$, $B(5,1,2)$, $C(3,8,3)$, $D(2,-2,1)$;

б) $A(0,-2,0)$, $B(-5,0,0)$, $C(1,-3,-1)$, $D(-6,1,1)$;

в) $A(0,0,1)$, $B(3,-2,0)$, $C(4,6,-9)$, $D(-1,0,2)$?

Во случај на потврден одговор најди ја равенката на рамнината.

3. Дали точките $A(1,2,3)$, $B(0,-2,4)$, $C(2,1,0)$ и $D(1,-4,3)$ се темиња на тетраедар?

3.2.6. Растојание од точка до рамнина

Нека е дадена рамнината R со векторската равенка

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0. \quad (1)$$

Растојанието на произволно избрана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ во просторот од дадената рамнина е еднакво на модулот на векторот $\overrightarrow{PM_1}$, каде што P е ортогоналната проекција на точката M_1 на дадената рамнина (црт. 1). Векторите $\overrightarrow{PM_1}$ и $\vec{n}_0$ се колинеарни бидејќи и двата се нормални на една иста рамнина. Според тоа, $\overrightarrow{PM_1} = d\vec{n}_0$, каде што $|d|$ е растојанието на точката M_1 од рамнината. Притоа да напоменеме дека $d > 0$, ако точката M_1 и координатниот почеток O се на различни страни од рамнината, додека $d < 0$, ако точката M_1 и координатниот почеток O се на иста страна од рамнината.

Радиусвекторот $\vec{r}_2$ на точката P може да го определиме од триаголникот OPM_1 :

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} = \vec{r}_1 - d\vec{n}_0,$$

црт. 1

каде што $\vec{r}_1$ е радиусвекторот на точката M_1 . Бидејќи точката P лежи во дадената рамнина нејзиниот радиусвектор ја задоволува равенката (1) што значи дека

$$\vec{r}_2 \cdot \vec{n}_0 - p = 0 \text{ т.е. } (\vec{r}_1 - d\vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 - p = 0.$$

По извршените операции добиваме

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 - d - p = 0,$$

или

$$d = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 - p. \quad (2)$$

Ако векторите $\vec{r}_1$ и $\vec{n}_0$ ги претставиме како линейна комбинација од координатните вектори,

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{n}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k},$$

за d добиваме

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p. \quad (3)$$

Растојанието d на точката M_1 од дадената рамнина е апсолутна вредност на бројот d определен со формулите (2) и (3). Притоа $d > 0$, ако точката M_1 и координатниот почеток O се на различни страни од рамнината, додека $d < 0$, ако точката M_1 и координатниот почеток O се на иста страна од рамнината.

Ако равенката на рамнината е дадена во општ векторски облик или општ скаларен облик, тогаш дадената равенка ја сведуваме во нормален облик, а потоа го одредуваме растојанието како во постапката изложена погоре. Така, на пример, ако рамнината е зададена со својата општа скаларна равенка

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

тогаш нејзината општа векторска равенка гласи:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0,$$

каде што $\vec{n} = (A, B, C)$, а $\vec{r}$ е радиусвекторот на произволна точка од рамнината. Тогаш општата векторска равенка може да ја запишеме во нормален векторски облик

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0,$$

каде што

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\pm |\vec{n}|}, \quad -p = \frac{D}{\pm |\vec{n}|}.$$

Бидејќи $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, добиваме

$$\vec{n}_0 = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad -p = \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Тогаш од формулата $d = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}_0 - p$ добиваме $d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

или

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 1. За да се најде растојанието на точката $M(-2, -4, 3)$ од рамнината $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, се составува општата равенка на дадената рамнина којашто гласи

$$2x - y + 2z + 3 = 0, \text{ и оттука } |d| = \left| \frac{2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 + 3}{\pm \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \right| = |3| = 3. \text{ Бидејќи } d = 3 > 0 \text{ заклучуваме}$$

дека точката M во однос на координатниот почеток се наоѓа на спротивната страна на дадената рамнина. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Најди го растојанието на точката $M(8, 3, -7)$ од рамнината $3y - 2z + 18 = 0$.
2. Дали точките $M(3, 2, 1)$ и $N(1, 2, 3)$ лежат од иста страна на рамнината $x + 3y - z = 2$?
3. Најди точка на x -оската еднакво оддалечена од рамнините $x - y + z = 4$ и $x - 2y + 2z = 0$.
4. Најди го растојанието меѓу паралелните рамнини $13x - y + 6z = -6$ и $26x - 2y + 12z = 4$.
5. Најди ја равенката на рамнината, која е паралелна со рамнината $2x + 2y - z - 11 = 0$ и е на растојание $d = 5$ единици од неа. Притоа бараната рамнина и точката $M(1, 2, 4)$ се наоѓаат на различни страни од дадената рамнина.
6. Нека точките $A(1, 1, 2)$, $B(2, 1, -2)$, $C(-1, -2, -3)$ и $D(3, 3, 3)$ се темиња на тетраедарот $ABCD$. Најди ја должината на висината на тетраедарот спуштена од темето D .

3.2.7. Агол меѓу две рамнини. Услов за ортогоналност на две рамнини

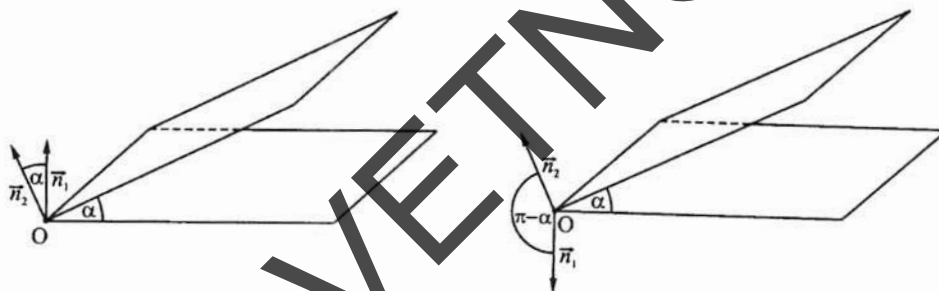
Нека се дадени две рамнини со своите векторски равенки

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_1 + D_1 = 0, \quad \vec{r} \cdot \vec{n}_2 + D_2 = 0.$$

Значи, векторот $\vec{n}_1$ е нормален на првата рамнина, а векторот $\vec{n}_2$ е нормален на втората рамнина. Познато е дека косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ е определен со формулата

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}. \quad (1)$$

Бидејќи аголот $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ е еднаков на аголот α меѓу дадените рамнини или го дополнува α до π , знаејќи го косинусот од аголот $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ може да го пресметаме аголот меѓу рамнините. Ако рамнините на се нормални или паралелни тогаш бројот $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ во формулата (1) е со знак плус (остар агол) или минус (тап агол), во зависност од насоките на векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, а не од положбата на рамнините (црт. 1). Затоа и во случајот $\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, α е аголот меѓу рамнините.



црт. 1

Значи, аголот α меѓу дадените рамнини е определен со формулата

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}. \quad (2)$$

Ако рамнините се зададени со своите општи равенки

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тогаш

$$\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}, \quad \vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k},$$

и за аголот α меѓу нив се добива формулата

$$\cos \alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 1. За да го пресметаме аголот α меѓу рамнините $2x + 5y + \frac{3}{\sqrt{2}}z + 7 = 0$ и $z = 0$, прво забележуваме дека рамнината чијашто равенка е $z = 0$ е всушност, ху координатната рамнина, чијшто нормален вектор е $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$.

Согласно со формулата за пресметување на агол меѓу две рамнини наоѓаме

$$\cos \alpha = \frac{\left| 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 1 \right|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ од каде што следува дека } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Две рамнини зададени со равенките

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

се заемно нормални ако и само ако се заемно нормални векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Како што знаеме, векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ се заемно нормални ако и само ако нивниот скаларен производ е еднаков на нула, односно

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

Бидејќи $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ условот за ортогоналност на рамнините се сведува на

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пример 2. Се бара равенката на рамнината којашто минува низ точките $M_1(1, -1, 3)$ и $M_2(0, 2, 3)$, а е нормална на рамнината $5x - y + 2z - 7 = 0$.

Нека бараната равенка на рамнината е

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Од претпоставката дека рамнината минува низ точката $M_1(1, -1, 3)$ следува условот

$$A \cdot 1 + B \cdot (-1) + C \cdot 3 + D = 0.$$

рамнината минува и низ точката $M_2(0, 2, 3)$ што значи дека

$$A \cdot 0 + B \cdot 2 + C \cdot 3 + D = 0.$$

За да биде бараната рамнина нормална на дадената рамнина мора да биде исполнет условот

$$A \cdot 5 + B \cdot (-1) + C \cdot 2 = 0.$$

Значи проблемот на наоѓање вредности на непознатите коефициенти A , B , C и слободниот член D на горната равенка се сведува на решавање на системот линеарни равенки

$$\begin{cases} A - B + 3C + D = 0 \\ 2B + 3C + D = 0 \\ 5A - B + 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ 2B + 3C + D = 0 \\ 14B + 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3B \\ D = -19B \\ C = -7B \end{cases}$$

Значи бараната равенка е $B(3x + y - 7z + 19) = 0$ или едноставно $3x + y - 7z + 19 = 0$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Најди го аголот меѓу рамнините зададени со равенките:

а) $2x - y + 2z - 1 = 0$ и $x + y + 4z - 5 = 0$;

б) $3x + 4y - 5z = 7$ и $4x - 3y - 5z = 9$.

2. Најди го аголот меѓу рамнините

а) $x + y = 11$ и $3x + 8 = 0$;

б) $x - \sqrt{3}z = 9$ и $z = 0$.

3. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(3, -4, 5)$ и е нормална на рамнините $2x - y + 3z = 0$ и $x + 3y - 2z - 6 = 0$.

4. Нека рамнините зададени со равенките $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 + D_1 = 0$ и $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 + D_2 = 0$ не се паралелни. Најди ја равенката на рамнината која е нормална на двете дадени рамнини и минува низ точката M_0 со радиусвектор $\vec{r}_0$.

3.3. Права во простор

Положбата на една права во просторот може да се определи на повеќе начини. На пример, права може да минува низ дадена точка и да биде нормална на некоја друга права или да биде паралелна на неа. Исто така, правата може да ја определите со две точки или како пресек на две рамнини. Оттука произлегува заклучокот дека една иста права може да ја зададеме со равенки од различни облици.

3.3.1. Разни видови равенки на права во простор

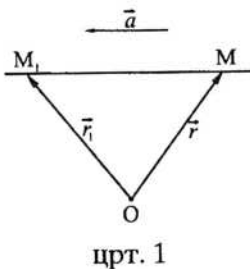
Бидејќи правата е основен геометриски поим, кој е прифатен без дефиниција, за да се дојде до нејзина равенка потребно е да се искористи некое нејзино својство.

А) Векторски облик на равенка на права

Нека е дадена правата која минува низ точката M_1 со радиусвектор $\vec{r}_1$ и е паралелна на векторот $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогаш точна е следнава теорема:

Теорема 1. Радиусвекторот $\vec{r}$ на произволна точка M од правата којашто минува низ точката M_1 со радиусвектор $\vec{r}_1$ и која е паралелна со векторот $\vec{a} \neq \vec{0}$, е определен со равенството

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}. \quad (1)$$



Доказ. Ако M е произволна точка од правата, со радиусвектор $\vec{r}$, тогаш векторот $\vec{M_1M}$ е колинеарен со векторот $\vec{a}$. Значи, постои реален број t така што $\vec{M_1M} = t\vec{a}$. Бидејќи векторот $\vec{a}$ е однапред даден фиксен вектор, параметарот t зависи само од векторот $\vec{M_1M}$ односно од положбата на точката M (црт. 1). Тогаш од триаголникот OM_1M добиваме $\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{M_1M}$, т.е.
 $\vec{r} = \vec{r_1} + t\vec{a}$. ■

Теорема 2. Нека $\vec{r_1}$ и $\vec{a}$ се дадени вектори. Равенството (1) ги претставува точките од правата која минува низ точката со радиусвектор $\vec{r_1}$ и која е паралелна на векторот $\vec{a}$, кога t се менува во множеството реални броеви $(-\infty < t < +\infty)$.

Доказ. Да ја означиме со M_1 точката чијшто радиусвектор е $\vec{r_1}$. Нека M е произволна точка во просторот со радиусвектор $\vec{r}$, којшто го задоволува равенството (1). Тогаш $\vec{r} - \vec{r_1} = t\vec{a}$, за некоја вредност на реалниот параметар t . Според тоа, векторот $\vec{r} - \vec{r_1}$ е колинеарен со векторот $\vec{a}$, од каде што следува дека правата определена со точките M и M_1 е паралелна со векторот $\vec{a}$. Бидејќи низ точката M_1 минува една и само една права паралелна со векторот $\vec{a}$, може да заклучиме дека точката M лежи на дадената права. ■

Од теорема 1 и од теорема 2 следува дека равенството (1) го задоволуваат сите точки од правата којашто е паралелна на векторот $\vec{a}$ и минува низ точката M_1 , и само тие. Значи, равенството (1) ја определува правата и се нарекува **векторска равенка на права**.

Б) Параметарска равенка на права

Нека се дадени точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка од правата којашто минува низ точката M_1 и која е паралелна со векторот $\vec{a}$, тогаш од векторската равенка на оваа права добиваме

$$xi + yj + zk = x_1i + y_1j + z_1k + t(a_1i + a_2j + a_3k)$$

или

$$xi + yj + zk = (x_1 + ta_1)i + (y_1 + ta_2)j + (z_1 + ta_3)k,$$

согласно со својствата на операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар. Од последното равенство следуваат скаларните равенства

$$x = x_1 + ta_1$$

$$y = y_1 + ta_2$$

$$z = z_1 + ta_3$$

(2)

Кога параметарот t ги прима сите можни вредности во множеството реални броеви, равенствата (2) ги даваат координатите $M(x, y, z)$ на секоја точка од правата. Затоа, тие се нарекуваат **параметарски равенки на права**.

Пример 1. Параметарските равенки на правата којашто минува низ точката $M(2, -4, 3)$ и која е паралелна на векторот $\vec{a} = (5, -2, 1)$ се $x = 2 + 5t$, $y = -4 - 2t$, $z = 3 + t$. ♦

В) Канонични равенки на права

✓ Ако претпоставиме дека сите координати на векторот $\vec{a}$ се различни од нула, т.е. $a_i \neq 0$ ($i=1,2,3$), тогаш параметарските равенки (2) може да се запишат во еквивалентен облик (решени по параметарот t):

$$t = \frac{x - x_1}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_1}{a_2}, \quad t = \frac{z - z_1}{a_3},$$

што значи дека

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}. \quad (3)$$

Равенствата (3) се нарекуваат **канонични равенки на права**.

✓ Ако една од координатите на векторот $\vec{a}$ е еднаква на нула, на пример $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, тогаш согласно со (2) се добиваат каноничните равенки:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2}, \quad z - z_1 = 0. \quad (4)$$

✓ Ако две од координатите на векторот $\vec{a}$ се еднакви на нула, на пример $a_1 \neq 0$, $a_2 = a_3 = 0$, тогаш каноничните равенки на правата (x -оската) согласно со (2) се:

$$y - y_1 = 0, \quad z - z_1 = 0. \quad (5)$$

Пример 2. Нека точките $A(-3, 1, -4)$, $B(-2, 0, 4)$ и $C(2, 6, -4)$ се темиња на триаголникот ABC . За да ја најдеме каноничната равенката на правата којашто минува низ темето C и која е паралелна на тежишната линија AA_1 , пред се констатираме дека точката A_1 е средина на страната BC , што значи $A_1(0, 3, 0)$. Тогаш $\vec{AA_1} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Векторската равенка на правата низ темето C , паралелна на векторот $\vec{AA_1}$ гласи:

$$\vec{r} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k} + t(3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}),$$

од каде што ги добиваме параметрските равенки на правата:

$$x = 2 + 3t, \quad y = 6 + 2t, \quad z = -4 + 4t.$$

Оттука каноничните равенки на правата се $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+4}{4}$, согласно со (3). ♦



Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги параметарските равенки на правата која минува низ точката $M(1, 3, -2)$ и е паралелна на векторот $\vec{a} = (7, -4, 2)$.

2. Која од следниве точки

а) $M_1(1, 3, -1)$;

б) $M_2(2, 4, 3)$;

в) $M_3(-2, 1, 1)$;

г) $M_4(1, 7, -3)$.

лежи на правата $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$?

3. Најди ги параметарските и каноничните равенки на правата што минува низ точката $M(2, -1, 3)$ и е нормална на рамнината $4x - 5y + 6z - 7 = 0$.

4. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(2, -5, 3)$ и е паралелна на правата $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$.

3.3.2. Равенка на права низ две точки

Нека се дадени две различни точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Правата која минува низ овие точки може да ја разгледуваме како права паралелна на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, ($\vec{a} \neq \vec{0}$ бидејќи точките M_1 и M_2 се различни) и која минува низ точката M_1 . Да го означиме со $\vec{r}_1$ радиусвекторот на точката M_1 . Тогаш векторската равенка на правата која минува низ дадените точки M_1 и M_2 гласи:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a},$$

или еквивалентно

$$\vec{r} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + t((x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}).$$

Тогаш параметарските равенки на правата се

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

така што каноничните равенки на правата низ точките M_1 и M_2 се:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример 1. Каноничните равенки на правата којашто минува низ точките $M_1(1, 2, 3)$ и $M_2(4, -5, 6)$ се $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{3}$. За точките $M_1(2, -3, 4)$ и $M_2(2, 4, -5)$ се добиваат каноничните равенки $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-4}{-9}$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на правата којашто минува низ точките
а) $M_1(3, 2, 3)$ и $M_2(2, 4, 1)$; б) $M_1(3, 1, 2)$ и $M_2(-1, 1, 0)$.
2. Запиши ја равенката на правата којашто минува низ координатниот почеток и низ точката $M(-1, 7, 3)$.
3. Запиши ги равенките на правите на кои лежат рабовите на тетраедарот ABCD, ако $A(0, 0, 2)$, $B(4, 0, 5)$, $C(5, 3, 0)$ и $D(-1, 4, -2)$.
4. Провери дали се колинеарни точките $M(3, 0, 1)$, $N(0, 2, 4)$ и $P\left(1, \frac{4}{3}, 3\right)$.

5. Запиши ја равенката на правата која минува низ координатниот почеток и тежиштето на триаголникот ABC, ако $A(2, -1, 3)$, $B(4, 5, -2)$ и $C(-3, 2, -1)$.

6. Точките $A(-1, 2, 4)$, $B(3, -1, -4)$ и $C(0, 4, 7)$ се темиња на даден триаголник. Најди ги равенките на правите, секоја од кои минува низ едно теме и е паралелна со спротивната страна.

3.3.3. Растојание од точка до права

Познато е дека растојанието од точка до права е еднакво на должината на нормалата спуштена од точката кон правата. Равенката на една права може да биде запишана во разни облици. Според тоа, и растојанието од точка до права може да се одреди по различни формули, во зависност од обликот на равенката на правата. Ќе ја изведеме формулата за пресметување растојание од точка до права зададена со каноничната равенка.

Теорема 1. Растојанието d од точката $M_2(x_2, y_2, z_2)$ до правата

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \text{ е одредено со формулата}$$

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Доказ. Да ја означиме со M_3 ортогоналната проекција на точката M_2 на дадената права (црт. 1), која е паралелна на векорот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и која минува низ точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Од правоаголниот триаголник $M_1M_2M_3$ за растојанието d од точката M_2 до дадената права добиваме:

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| \sin(\angle \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}).$$

Бидејќи аголот $(\angle \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_2})$ е еднаков на аголот $(\vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2})$, за растојанието d добиваме

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| \sin(\angle \vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2}).$$

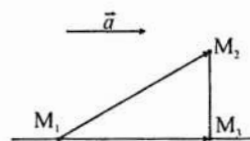
Од

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| |\vec{a}| \sin(\angle \vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2}),$$

заменувајќи го изразот

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| \sin(\angle \vec{a}, \overrightarrow{M_1M_2}) \text{ со } \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \text{ за растојанието } d \text{ добиваме}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \quad (1)$$



црт. 1

Бидејќи

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

за координатното претставување на векторскиот производ $\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}$ имаме

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Тогаш,

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2},$$

така што за растојанието d од дадената точка до дадената права од (1) конечно добиваме

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \blacksquare$$

Пример 1. Согласно со погорната формула, растојанието од точката $M(1,0,1)$ до правата

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{е} \quad d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0-0 & 1-0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1-0 & 1-2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1-2 & 0-0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}. \blacklozenge$$



Задачи за самостојна работа

1. Најди го растојанието од точката $M(3,5,4)$ до правата $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$.

2. Најди го растојанието од точката $M(3,2,-3)$ до правата зададена со равенката $x=1+t, y=2-t, z=-3t$.

3. Најди го растојанието од координатниот почеток до правата $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

4. Определи која од точките $M(-3,1,0)$ и $N(5,4,-3)$ е на помало растојание од правата $\frac{x-7}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$.

5. Најди ги висините во триаголникот ABC , ако $A(0,0,-1)$, $B(0,-2,0)$ и $C(1,-1,0)$.

3.3.4. Агол меѓу две прави. Услов за ортогоналност на две прави

По договор под агол меѓу две прави во просторот се подразбира остриот или најмногу правиот аголот меѓу кои било два вектора кои се паралелни на дадените прави.

Нека се дадени две прави со своите канонични равенки:

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}.$$

Според наведениот договор аголот α што го зафаќаат дадените прави всушност е остриот агол α меѓу векторите $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Косинусот на аголот α може да го определиме според формулата

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Ако скаларниот производ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и модулите $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ ги изразиме со помош на координатите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, добиваме

$$\cos \alpha = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Пример 1. За да се пресмета аголот α што го зафаќа правата што минува низ точката $M(2, -1, 4)$ и е паралелна на правата $\frac{x-2}{4} = \frac{y-9}{12} = \frac{z+6}{3}$, со правата $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{4}$, прво се составуваат каноничните равенки на правата којашто минува низ точката $M(2, -1, 4)$ и е паралелна на правата $\frac{x-2}{4} = \frac{y-9}{12} = \frac{z+6}{3}$, а тоа се $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-4}{3}$.

Сега се пресметува косинусот на аголот α меѓу правите $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{4}$ по погоре добиената формулата

$$\cos \alpha = \frac{|4 \cdot 4 + 12 \cdot 7 + 3 \cdot 4|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \frac{112}{117}.$$

Оттука $\alpha \approx 0,2934 \text{ rad.}$ ♦

Од формулата за пресметување агол меѓу две прави може да го изведеме **условот за ортогоналност на две прави**. Имено, две прави се ортогонални, ако и само ако векторите на нивните правци се ортогонални т.е.

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Пример 2. Правите $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-4}{-5}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$ се ортогонални бидејќи $3 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 = 0$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Најди го косинусот од аголот α меѓу правите

а) $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{-2}$; б) $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

2. Пресметај го косинусот од аголот α што го зафаќа правата што минува низ точката $M(-1,3,2)$ и е паралелна на правата $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$, со правата $\frac{x-3}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$.

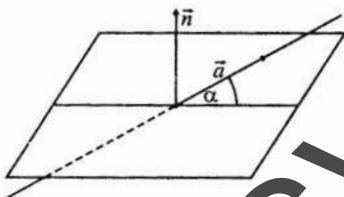
3. Најди го косинусот од аголот α што го зафаќа правата што минува низ координатниот почеток и низ точката $M(-1,5,-3)$, со правата $\frac{x}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$.

4. Дали се ортогонални правите кои се сечат во координатниот почеток и уште е познато дека едната минува низ точката $M(-4,4,2)$, а другата низ точката $N(2,1,2)$.

5. Најди ги аглиите меѓу рабовите кои немаат заедничко теме на тетраедарот $ABCD$, ако $A(3,-1,0)$, $B(0,-7,3)$, $C(-2,1,-1)$ и $D(3,2,6)$.

3.3.5. Агол меѓу права и рамнина

Агол меѓу права и рамнина е остриот или правиот агол што го зафаќа правата со нејзината ортогонална проекција на таа рамнина.



Нека се дадени правата со својата канонична равенка

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

и рамнината со својата општа равенка

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Да го означиме со α аголот меѓу правата и рамнината. Тогаш аголот α е комплементарен на аголот меѓу правата и

црт. 1 векторот $\vec{n}$ кој е нормален на рамнината (црт. 1). Бидејќи правата е паралелна на векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, а векторот $\vec{n} = (A, B, C)$ е нормален на рамнината, добиваме дека $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| |\vec{n}|}$. Според тоа синусот од аголот α меѓу дадената права и дадената рамнина може да го пресметаме според формулата:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| |\vec{n}|}.$$

Ако апсолутната вредност на скаларниот производ $\vec{a} \cdot \vec{n}$ и модулот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{n}$ ги изразиме со помош на нивните координатни претставувања, тогаш синусот од аголот α меѓу дадената права и дадената рамнина може да го пресметаме според формулата:

$$\sin \alpha = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Пример 1. Аголот меѓу правата $\frac{x+12}{3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z}{2}$ и рамнината $15x - 10y + 6z - 3 = 0$ може да се одреди на два начина:

I начин. Од равенката на правата имаме $\vec{a} = (3, 6, 2)$ а од равенката на рамнината заклучиваме дека $\vec{n} = (15, -10, 6)$. Тогаш $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{n}| = 19$, $\vec{a} \cdot \vec{n} = -3$, од каде што следува дека $\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| |\vec{n}|} = \frac{|-3|}{7 \cdot 19} = \frac{3}{133}$, односно $\alpha = \arcsin \frac{3}{133}$. Оттука $\alpha \approx 0,026551 \text{ rad}$.

II начин. Од равенката на правата за векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ имаме $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ и $a_3 = 2$, додека од равенката на рамнината заклучиваме дека $A = 15$, $B = -10$ и $C = 6$. Тогаш

$$\sin \alpha = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{|5 \cdot 3 + (-10) \cdot 6 + 6 \cdot 2|}{\sqrt{5^2 + (-10)^2 + 6^2} \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{3}{133},$$

и повторно $\alpha \approx 0,026551 \text{ rad}$. ♦

Од формулата за пресметување агол меѓу права и рамнина може да го изведеме условот при кој дадена права е паралелна на дадена рамнина. Имено, правата зададена со равенката

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

е паралелна на рамнината зададена со равенката

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ако и само ако важи

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0.$$

Пример 2. Согласно со горенаведениот услов, правата зададена со равенката

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$$

е паралелна на рамнината зададена со равенката $x + 3z + 7 = 0$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Најди го аголот меѓу правата $y + 1 = 0$, $\frac{x+1}{3} = \frac{z-9}{10}$ и рамнината $3x - 15y - 2z + 1 = 0$.

2. Најди го аголот меѓу правата $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ и рамнината што минува низ точката

$M(2,3,4)$ и која е паралелна со векторите $\vec{a} = (1,1,-1)$ и $\vec{b} = (-2,-1,2)$.

3. Најди ја равенката на рамнината што минува низ правата која е пресек на рамнините определени со равенките: $x + 4y + 3z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 5z + 12 = 0$, и која е паралелна со

правата $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-3}$.

4. За која вредност на коефициентот A рамнината $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ е паралелна на правата $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?

3.4. Заемни односи

Сега сме спремни да ги утврдиме заемните односи меѓу две рамнини, права и рамнина и две прави во просторот, зададени со своите равенки.

3.4.1. Замен однос на две рамнини

Прво ќе најдеме потребен и доволен услов при кој две рамнини се паралелни, се совпаѓаат или се сечат. Потоа ќе ја изведеме равенката на права зададена како пресек на две рамнини.

А) Услов за паралелност на две рамнини

Нека се дадени рамнините R_1 и R_2 со општите равенки

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

соодветно, Тогаш, векторот $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ е нормален на рамнината R_1 , а векторот $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ е нормален на рамнината R_2 . Дадените рамнини се паралелни ако и само ако се колинеарни нивните нормални вектори. Од условот за колинеарност на два вектора добиваме дека рамнините R_1 и R_2 се паралелни ако и само ако важи $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 = \lambda C_2$, за некој $\lambda \in \mathbb{R}$, односно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Според тоа, дадените рамнини се паралелни ако и само ако коефициентите A_1 , B_1 и C_1 се пропорционални на коефициентите A_2 , B_2 и C_2 , соодветно.

Пример 1. Рамнините зададени со равенките $2x - 3y + 7z - 1 = 0$ и $6x - 9y + 21z - 3 = 0$ се паралелни, бидејќи важи $\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{7}{21}$. ♦

Б) Услов за совпаѓање на две рамнини

Нека се дадени рамнините R_1 и R_2 со општите равенки

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

соответно. Ако рамнините се совпаѓаат, т.е. $R_1 = R_2$ тогаш согласно со условот за паралелност $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$ и $C_2 = \lambda C_1$, за некој реален број $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. нивните равенки се од обликот

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0.$$

Од претпоставката дека овие две равенки определуваат една иста рамнина, следува дека секое решение на првата равенка е решение на втората равенка и обратно.

Нека (x_0, y_0, z_0) е кое било решение на двете равенки. Тогаш

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 = 0$$

т.е. $\lambda(-D_1) + D_2 = 0$, или $D_2 = \lambda D_1$. Значи, ако $R_1 = R_2$, тогаш е точно дека

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Обратно, ако коефициентите во дадените равенки го исполнуваат условот $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ и $D_2 = \lambda D_1$, за некој $\lambda \in \mathbb{R}$, тогаш тие се еквивалентни равенки, па R_1 и R_2 се совпаѓаат, бидејќи втората равенка се сведува на $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) = \lambda D_1$.

Дефинитивно, дадените рамнини се совпаѓаат ако и само ако е исполнет условот

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

односно, ако и само ако коефициентите A_1 , B_1 , C_1 и D_1 се пропорционални на коефициентите A_2 , B_2 , C_2 и D_2 , соодветно.

Пример 2. Рамнините определени со равенките $x + 3y - z + 1 = 0$ и $6x + 18y - 6z + 6 = 0$ се совпаѓаат, бидејќи $\frac{1}{6} = \frac{3}{18} = \frac{-1}{-6}$. ♦

В) Услов за пресек на две рамнини. Равенка на права како пресек на две рамнини

Поаѓајќи од условите изнесени под А) и под Б) заклучивме дека две рамнини се сечат ако и само ако не е нарушен условот $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Познато е дека две рамнини во просторот кои се сечат определуваат една права. Да ја определиме равенката на правата која е пресек на две рамнини, кои не се паралелни, и се зададени со општите равенки:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D = 0.$$

Тогаш векторите $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ се нормални на заедничката права на двете рамнини. Значи, векторот $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ е паралелен на правата која е пресек на двете дадени рамнини. Согласно со дефиницијата на векторски производ, за координатна форма добиваме

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Бидејќи дадените рамнини не се паралелни, коефициентите пред x , y и z , не се сите еднакви на нула и не се пропорционални. Тогаш барем една координата на векторот $\vec{a}$ е различна од нула. Ако точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$ е произволна точка што припаѓа на двете рамнини, односно на правата, тогаш векторската равенка на правата која минува низ точката M_1 со радиус вектор $\vec{r}_1$ и е паралелна на векторот $\vec{a}$ гласи

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a},$$

т.е.

$$\vec{r} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + t \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right).$$

Тогаш параметарските равенки на правата ќе гласат:

$$x = x_1 + t \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad y = y_1 + t \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad z = z_1 + t \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

а нејзините канонични равенки се

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пример 1. За да се најдат каноничните равенки на правата определена како пресек на рамнините зададени со равенките $2x + y + 2z + 1 = 0$ и $x + y + 3z - 2 = 0$, прво се одредува носечкиот вектор на правата:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Една точката што лежи на двете дадени рамнини, т.е. на бараната права е $M(0, -7, 3)$.

Тогаш каноничната равенка на правата гласи: $\frac{x}{1} = \frac{y + 7}{2} = \frac{z - 3}{-2}$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Испитај ја заемната положба на рамнините:

а) $3x - 5y - z - 2 = 0$

б) $x - y - 1 = 0$

$6x - 10y - 2z - 4 = 0.$

$2x - 2y - 4 = 0.$

$$\begin{aligned} \text{в) } x + 3y + z &= 0 \\ 6x + 18y + 6z &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } 4x - y + z - 1 &= 0 \\ 6x + y - z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

2. Запиши ги каноничните равенки на правата:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

3. Најди ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,3,1)$ и низ правата

$$\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

4. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,-5,3)$ и е паралелна на правата

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

5. За кои вредности на параметрите B и D правата $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ и лежи во xy -рамнината.

3.4.2. Замен однос на две прави во просторот

Ќе изведеме потребен и доволен услов при кој две прави се паралелни, се сечат или се разминуваат.

А) Услов за паралелност на две прави

Нека се дадени две прави со своите канонични равенки

$$\frac{x - p_1}{a_1} = \frac{y - p_2}{a_2} = \frac{z - p_3}{a_3} \quad \text{и} \quad \frac{x - q_1}{b_1} = \frac{y - q_2}{b_2} = \frac{z - q_3}{b_3}.$$

Тогаш векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е паралелен на првата права, а векторот $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ е паралелен на втората рамнина. Дадените прави се паралелни ако и само ако се колинеарни векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Од условот за колинеарност на два вектора добиваме дека дадените прави се паралелни ако и само ако важи $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$ и $a_3 = \lambda b_3$, за некое $\lambda \in \mathbb{R}$, односно

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Пример 1. За да се најде вредноста на параметарот a за којашто правите зададени со равенките со $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{a}$ и $\frac{x-5}{8} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{4}$ се паралелни поаѓаме од условот за паралелност на две прави. Имено од условот $\frac{4}{8} = \frac{-2}{-4} = \frac{a}{4}$ добиваме дека $a = 2$. ♦

Б) Услов за пресек на две прави

Познато е дека две прави се сечат ако и само ако лежат во иста рамнина и не се паралелни.

Нека се дадени две прави со своите канонични равенки

$$\frac{x-p_1}{a_1} = \frac{y-p_2}{a_2} = \frac{z-p_3}{a_3} \quad \text{и} \\ \frac{x-q_1}{b_1} = \frac{y-q_2}{b_2} = \frac{z-q_3}{b_3}.$$

Првата од дадените прави минува низ точката $P(p_1, p_2, p_3)$ и е паралелна на векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, додека втората права минува низ точката $Q(q_1, q_2, q_3)$ и е паралелна на векторот $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Дадените прави се сечат ако и само ако векторите $\vec{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и се компланарни. Користејќи го условот за компланарност на три вектори добиваме дека дадените прави се сечат ако и само ако е исполнето равенството

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 2. За да се утврди дали се сечат правите $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ и во потврден случај за да се најдат координатите на пресечната точка S прво се проверува точноста на равенството

$$\begin{vmatrix} 0+1 & 0-1 & 0+1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Потоа поаѓајќи од параметарските равенки на правите

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = u \\ y = 2u \\ z = 3u \end{cases}$$

за пресечната точка мора да бидат исполнети равенствата $u = -1 + 2t$, $2u = 1 + t$ и $3u = -1 + 4t$. Бидејќи тие се исполнети за $t=1$ и $u=1$ заклучуваме дека пресечна точка е $S(1, 2, 3)$.

В) Разминувачки прави

Две прави коишто не се паралелни и не се сечат се нарекуваат разминувачки. Согласно со условите изведени под А) и под Б) правите зададени со каноничните равенки

$$\frac{x-p_1}{a_1} = \frac{y-p_2}{a_2} = \frac{z-p_3}{a_3} \quad \text{и}$$

се разминувачки ако и само ако $\frac{x-q_1}{b_1} = \frac{y-q_2}{b_2} = \frac{z-q_3}{b_3}$ и $\begin{vmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Пример 3. Правите $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x+31}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{6}$ се разминувачки, бидејќи $\begin{vmatrix} -31-2 & 6-1 & 3+1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$.



Задачи за самостојна работа

1. Испитај дали се сечат правите

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$,

в) $\begin{cases} 4x+z-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+y-z+4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$.

2. Дадени се правите $\begin{cases} 7x+2y-2z+7=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ и $\frac{x-7}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$. Најди ја вредноста на параметарот a за која дадените прави се сечат, а потоа најди ги координатите на пресечната точка.

3. Дадени се правите $\frac{x-2}{a} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$ и $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$. Најди ја вредноста на параметарот a за која дадените прави лежат во една рамнина, а потоа најди ја равенката на таа рамнина.

4. Запиши ја равенката на права која минува низ точката $A(4,0,-1)$ и ги сече правите $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ и $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

5. Запиши ја равенката на правата што ги сече правите $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$ и е паралелна на правата $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.

3.4.3. Заемен однос на права и рамнина

Нека

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

се каноничните равенки на произволна права и нека

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

е општата равенка на произволна рамнина.

Една права во просторот може да е паралелна на дадена рамнина, да лежи во рамнината или да ја прободува рамнината. За да се изведе потребен и доволен услов за секој од трите случаи, кои заедно се исклучуваат, правата ќе ја запишеме во параметарски облик:

$$x = x_1 + ta_1, \quad y = y_1 + ta_2, \quad z = z_1 + ta_3.$$

Со внесување на координатите на произволна точка од правата во равенката на рамнината ја добиваме равенката по променливата (параметарот t)

$$A(x_1 + ta_1) + B(y_1 + ta_2) + C(z_1 + ta_3) + D = 0,$$

или

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Со воведување на ознаките $a = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3$ и $b = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ равенката се сведува во облик

$$at + b = 0.$$

Случај I Ако $a = b = 0$, тогаш секој реален број е решение на равенката $at + b = 0$, што значи дека координатите на секоја точка од правата ја задоволуваат равенката на рамнината, т.е. правата лежи во рамнината.

Случај II Ако $a = 0$ и $b \neq 0$, тогаш равенката $at + b = 0$ претставува противречност, што значи дека координатите на ниедна точка од правата не ја задоволуваат равенката на рамнината, т.е. правата е паралелна на рамнината.

Случај III Ако $a \neq 0$, тогаш равенката $at + b = 0$ има единствено решение $t = -\frac{b}{a}$ што значи дека правата и рамнината имаат само една заедничка точка, соодветна на вредноста на параметарот $t = -\frac{b}{a}$, т.е. правата ја прободува рамнината во точката

$$M\left(x_1 - \frac{b}{a}a_1, y_1 - \frac{b}{a}a_2, z_1 - \frac{b}{a}a_3\right).$$

Погорната дискусија може да ја резимираме во вид на следниве заклучоци:

✓ Правата $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$ лежи во рамнината $Ax + By + Cz + D = 0$ ако и само ако важат равенствата:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \text{ и } Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

✓ Правата $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$ е паралелна на рамнината $Ax + By + Cz + D = 0$ ако и само ако се исполнети условите:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0 \text{ и } Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0.$$

✓ Правата $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$ ја прободува рамнината $Ax + By + Cz + D = 0$ ако и само ако е исполнет условот:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$$

Пример 1. Ако се дадени правата $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и рамнината $3x + 5y - z - 2 = 0$, тогаш од $3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \neq 0$ може да заклучиме дека дадената права ја прободува рамнината. За координатите на пресечната точка добиваме

$$\left(12 - \frac{78}{26} \cdot 4 = 0,9 - \frac{78}{26} \cdot 3 = 0,1 - \frac{78}{26} \cdot 1 = -2 \right).$$



Задачи за самостојна работа

1. Најди ја заедничката точка на правата $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и на рамнината $3x - y + 2z - 5 = 0$.

2. Запиши ја равенката на правата што минува низ заедничките точки на рамнината $2x + y - 3z + 1 = 0$ со правите $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$ и $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+4}{-6}$.

3. Провери дали правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ лежи во рамнината $4x + 3y - z + 3 = 0$.

4. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(3,1,-2)$ и низ правата $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

5. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ нормалите спуштени од точката $M(-3,2,5)$ на рамнините $4x + y - 3z + 13 = 0$ и $x - 2y + z - 11 = 0$.

Задачи за вежбање

1. Запиши ги координатите на точката што е симетрична на точката $M(3,-1,2)$ во однос на

а) секоја од координатните рамнини; б) координатниот почеток.

2. Најди го растојанието на точката $M(12,-3,4)$ од

а) координатниот почеток; б) координатните оски.

3. Најди ги аглите што радиусвекторот на точката $M(6,2,9)$ ги зафаќаат со координатните оски.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(-4, -1, 2)$, $B(3, 5, -6)$ и $C(4, 4, 1)$.
5. Докажи дека отсечките што ги сврзуваат средините на спротивните рабови кај тетраедарот се сечат во една иста точка која ги преполовува.
6. Отсечката AB е поделена на пет еднакви дела при што првата од делбените точки има координати $C(3, -5, 7)$ а последната $F(-2, 4, -8)$. Најди ги координатите на крајните точки на дадената отсечка.
7. Дали точките $A(3, -2, 3)$, $B(0, 4, 9)$, $C(2, 0, 5)$ и $D(2, -8, -1)$ лежат во една иста рамнина.
8. Запиши ја равенката на рамнината која
- минува низ точката $M(2, -5, 3)$ и е паралелна на xz -рамнината,
 - минува низ точката $M(-3, 1, -2)$ и низ z -оската,
 - минува низ точките $M_1(4, 0, -2)$, $M_2(5, 1, 7)$ и е паралелна на x -оската.
9. Најди ги отсечоците на координатните оски на следниве рамнини:
- $2x - 3y - z + 12 = 0$;
 - $5x + y - 3z - 15 = 0$;
 - $x - y + z - 1 = 0$.
10. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(7, -5, 1)$ и на координатните оски отсекува позитивни и еднакви меѓу себе отсечоци.
11. Доведи ги во нормален облик следниве равенки на рамнина:
- $10x + 2y - 11z + 60 = 0$;
 - $6x - 6y - 7z + 33 = 0$.
12. Запиши ја равенката на рамнината која е на растојание 6 единици од координатниот почеток, а за отсечоците на координатните оски важи $a:b:c = 1:3:2$.
13. Најди ги косинусите на правците на нормалата на рамнината $2x - y + 2z + 9 = 0$.
14. Најди го аголот меѓу yz -рамнината и рамнината зададена со равенката $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$.
15. Пресметај ја должината на висината на тетраедарот ABCD спуштена од темето A, ако $A(0, 6, 4)$, $B(3, 5, 3)$, $C(-2, 11, -5)$ и $D(1, -1, 4)$.
16. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ:
- точката $M(-2, 7, 8)$ и е паралелна на рамнината $x - 4y + 5z - 1 = 0$;
 - координатниот почеток и е нормална на рамнините $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$;
 - точките $L(0, 0, 1)$ и $M(3, 0, 0)$ и со xu -рамнината зафаќа агол $\frac{\pi}{3}$.
17. Најди точка на z -оската, еднакво оддалечена од рамнините $x + 4y - 3z - 2 = 0$ и $5x + z + 8 = 0$.
18. Запиши ги равенките на бочните страни на тетраедарот ABCD, ако $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 5)$, $C(1, 1, 0)$ и $D(4, 1, 2)$.

19. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ пресечната права на рамнините $x + 5y + z = 0$ и $x - z + 4 = 0$, а со рамнината $x - 4y - 8z + 12 = 0$ зафаќа агол $\frac{\pi}{4}$.

20. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(1, -5, 3)$ и со координатните оски зафаќа агли еднакви на $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{2\pi}{3}$, соодветно.

21. Запиши ја равенката на правата која минува низ координатниот почеток, нормално на правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

22. Запиши ја равенката на нормалата на рамнината $5x + 3y - 7z + 1 = 0$ повлечена од точката $M(3, -2, 4)$.

23. Запиши ја равенката на рамнината која минува низ координатниот почеток, и е нормална на правата $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}$.

24. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ правата $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$, нормално на рамнината $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

25. Најди ја равенката на проекцијата на правата $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на рамнината $x - y + 3z + 8 = 0$.

26. Запиши ја равенката на рамнината што минува низ правите $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ и $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}$.

27. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(1, 0, 7)$, паралелно на рамнината $3x - y + 2z - 15 = 0$ и ја сече правата $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$.

28. На правата $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ најди точка еднакво оддалечена од точките $A(3, 11, 4)$ и $B(-5, -13, -2)$.

29. Најди ги координатите на ортогоналната проекција на точката $M(2, -3, 5)$ врз рамнината $x + 2y - 2z - 4 = 0$.

30. Најди ги координатите на симетричната точка на точката $M(3, 4, 7)$ во однос на рамнината $2x - y + z + 9 = 0$.

31. Најди ги координатите на симетричната точка на точката $M(2, 1, 3)$ во однос на правата $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

PROSVETNO DELO

Познати ни се веќе поимите координатен систем во рамнина, координатен систем во простор, со коишто се овозможува не само на секоја точка од рамнината (просторот) да ѝ се припише еднозначно подредена двојка (x, y) (тројка (x, y, z)) од реални броеви и обратно, туку и операциите собирање и множење со број на векторите да се извршуваат преку едноставно дефинирани операции на соодветните подредени двојки (тројки) реални броеви. Вообичено, множеството на подредени двојки реални броеви се означува со $\mathbb{R}^2$, т.е. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, а $\mathbb{R}^3$ го претставува множеството од подредени тројки реални броеви, т.е. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Овие две множества и операциите собирање и множење со број на нивните елементи може да се воопшти со воведување на поимот (реален) векторски простор.

4.1. Дефиниција на векторски простор

Дефиниција 1. Непразно множество V во коешто за секои елементи $u, v \in V$ е дефиниран збирот $u + v \in V$, и за секој елемент $u \in V$ и реален број, скалар $k \in \mathbb{R}$, е дефиниран производот $ku \in V$ се нарекува **векторски простор**, а неговите елементи **вектори**, ако се исполнети условите:

$$C_1: (u + v) + w = u + (v + w) \text{ за секои } u, v, w \in V.$$

$$C_2: \text{Постои (единствен) елемент од } V, \text{ наречен нулти (нула) означен со } 0, \text{ така што } u + 0 = 0 + u = u \text{ за секој } u \in V.$$

$$C_3: \text{За секој } u \in V, \text{ постои (единствен) елемент од } V \text{ наречен спротивен и означен со } -u \text{ така што } u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

$$C_4: u + v = v + u \text{ за секои } u, v \in V.$$

$$M_1: a(u + v) = au + av \text{ за секои } u, v \in V \text{ и секој } a \in \mathbb{R}.$$

$$M_2: (a + b)u = au + bu \text{ за секои } a, b \in \mathbb{R} \text{ и секој } u \in V.$$

$$M_3: (ab)u = a(bu) \text{ за секои } a, b \in \mathbb{R} \text{ и секој } u \in V.$$

$$M_4: 1u = u \text{ за секој } u \in V \text{ и единицата } 1 \in \mathbb{R}.$$

Вообичаено елементите од полето $\mathbb{R}$ во овој случај се нарекуваат **скалари**. Множењето на вектор со скалар не е операција, бидејќи не пресликува два вектора во вектор, но сепак се договараме и неа да ја викаме операција

Првите четири аксиоми: $C_1 - C_4$ се однесуваат на својствата на операцијата собирање на вектори, и според нив, $(V, +)$ е абелова група. Останатите четири аксиоми: $M_1 - M_4$ се однесуваат на својствата на операцијата множење на вектор со скалар.

Векторскиот простор вообичаено го бележиме со V , а неговите елементи со $u, v, w, \dots$

Според нашите ознаки користиме ист симбол 0 и за нулата како број и за нултиот вектор како елемент на V . Дали се работи за нулата како број или за нулти вектор, не е тешко за се заклучи од содржината на текстот. Поточно, скаларот секогаш го пишуваме пред векторот, па во изразот $0u$ се подразбира дека 0 е бројот нула, а во изразот $k0$ се подразбира дека 0 е нулти вектор.

Да напомниме дека дефиницијата што ја дадовме за векторски простор претпоставува дека множеството скалари е множеството реални броеви. Во опит случај скаларите можат да бидат елементи и од некое друго бројно множество K , коешто има структура на поле, на пример множеството од комплексни броеви или рационални броеви или некое друго поле. Ние ќе ги проучуваме векторските простори над реалните броеви. Притоа ако V е векторски простор над полето реални броеви ќе пишуваме $V(\mathbb{R})$.

Теорема 1. Нека V е векторски простор. Тогаш

- (i) $(\forall k \in \mathbb{R})$ и $0 \in V$, $k0 = 0$,
- (ii) $(\forall u \in V)$ и за $0 \in \mathbb{R}$, $0u = 0$,
- (iii) ако $ku = 0$ каде $k \in \mathbb{R}$ и $u \in V$, тогаш $k = 0$ или $u = 0$,
- (iv) $(\forall k \in \mathbb{R})(\forall u \in V) \quad (-k)u = k(-u) = -ku$.

Доказ. (i) Според аксиома C_2 за $u = 0$ добиваме $0 + 0 = 0$. Според аксиома M_1 , $k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$. Од овде следува дека $k0 = 0$, согласно со единственоста на 0 .

(ii) Бидејќи $0 + 0 = 0$ ($0 \in \mathbb{R}$), од M_2 добиваме $0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. Оттука добиваме дека $0u = 0$.

(iii) Нека $ku = 0$. Ако $k \neq 0$, тогаш постои $k^{-1} \in \mathbb{R}$ така што $k^{-1}k = 1$. Од овде имаме $u = 1u = (k^{-1}k)u = k^{-1}(ku) = k^{-1}0 = 0$.

(iv) Од $u + (-u) = 0$ добиваме $0 = k0 = k(u + (-u)) = ku + k(-u)$ т.е. $0 = ku + k(-u)$.

Додавајќи $-ku$ кон двете страни на последното равенство добиваме $-ku = k(-u)$. Користејќи дека $k + (-k) = 0$, добиваме $0 = 0u = (k + (-k))u = ku + (-k)u$. Додавајќи $-ku$ кон двете страни, добиваме $-ku = (-k)u$. Дефинитивно, $-ku = k(-u)$ за секој $k \in \mathbb{R}$ и секој $u \in V$. ■

Пример 1. Во множеството $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ дефинираме операција собирање со

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

и операција множење со скалар $k \in \mathbb{R}$,

$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

Со непосредна проверка на аксиомите $C_1 - C_4$ и аксиомите $M_1 - M_4$ се покажува дека $\mathbb{R}^n$ е векторски простор. Овој простор вообичаено го викаме реален векторски простор. ♦

Пример 2. Нека V е множеството од сите полиноми $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (n произволен природен број) со коефициенти во $\mathbb{R}$. Тогаш V е векторски простор во однос на вообичаеното собирање на полиноми и множење на полином со реален број. Нултиот

полином е нулти вектор; векторот $(-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n$ е спротивен вектор на $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. ♦

Пример 3. Нека X е непразно множество и нека V се состои од сите функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Дефинираме збир $f+g \in V$ на функциите $f, g \in V$, и производ $kf \in V$ со $k \in \mathbb{R}$ на следниов начин

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ и } (kf)(x) = kf(x), \text{ за секој } x \in X, \text{ секој } k \in \mathbb{R}.$$

Се покажува дека V со вака дефинираните операции е векторски простор над $\mathbb{R}$. Притоа нултиот вектор 0 е нултата функција, $0(x) = 0$ за секој $x \in X$. За $f \in V$, спротивен вектор е функцијата $-f \in V$ дефинирана со $(-f)(x) = -f(x)$, за секој $x \in X$. ♦



Задачи за самостојна работа

- Дали множеството од сите пресликувања $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ од облик
 - $f(x, y, z) = ax + by + cz$,
 - $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$,
 за некои $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, е векторски простор во однос на вообичаената операција собирање на функции и множење на функција со реален број?
- Дали множеството на сите вектори во $\mathbb{R}^3$ кои се колинеарни со векторот $(1, -2, 3)$ е векторски простор во однос на вообичаената операција собирање во $\mathbb{R}^3$ и множење на вектор од $\mathbb{R}^3$ со реален број?
- Дали множеството на сите вектори од облик $x(2, 0, 3) + y(-1, 4, -2)$, каде што $x, y \in \mathbb{R}$ претставува векторски простор во однос на операциите во $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$?
- Дали множеството на сите вектори $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ такви што
 - $2x + 3y - z = 0$,
 - $2x + 3y - z + 3 = 0$;
 во однос на вообичаените операции со вектори во $\mathbb{R}^3$ претставува векторски простор?
- Дали множеството на
 - реални броеви $\mathbb{R}$;
 - комплексни броеви $\mathbb{C}$,
 претставува векторски простор над реалните броеви во однос на обичното собирање и множење?
- Дали множеството на вектори од облик (x, y, z) , каде што $x, y, z \in \mathbb{Z}$, во однос на вообичаените операции со вектори претставува векторски простор над $\mathbb{R}$?
- Дали множеството од нултиот вектор на $V(\mathbb{R})$, $\{0\}$, е векторски простор во однос на операциите дефинирани во V ?

4.2. Векторски потпростори

Дефиниција 1. Подмножеството W од векторскиот простор V , се нарекува **векторски потпростор** или само **потпростор** од V , ако W е векторски простор над $\mathbb{R}$ во однос на операциите собирање и множење со скалар во V .

Теорема 1. Подмножеството W е потпростор од V , ако и само се исполнети следниве услови:

- (i) W е непразно множество,
- (ii) W е затворено во однос на собирањето, т.е. ако $v, w \in W$, тогаш $v + w \in W$,
- (iii) W е затворено во однос на множењето со скалар, т.е. ако $v \in W$ и $k \in \mathbb{R}$, тогаш $kv \in W$.

Доказ. Ако W е потпростор тогаш условите (i), (ii) и (iii) се исполнети согласно со дефиницијата на векторски потпростор.

Обратно, нека W ги задоволува условите (i), (ii) и (iii), т.е. $W \neq \emptyset$ и собирањето и множењето со скалар се добро дефинирани. Аксиомите C_1, C_4, M_1, M_2, M_3 и M_4 важат во W , бидејќи векторите во W се вектори и во V . Останува да се докажат аксиомите C_2 и C_3 .

Нека $u \in W$, ($W \neq \emptyset$). Од (iii) следува дека $0u = 0 \in W$ и освен тоа $v + 0 = v$ за секое $v \in W$. Затоа C_2 важи. Нека сега $v \in W$. Тогаш $(-1)v = -v \in W$ и освен тоа $v + (-v) = 0$. Затоа важи и C_3 . Значи W е потпростор од V . ■

Од оваа теорема ја добиваме последицата:

Последица 1. Подмножеството W е потпростор од V , ако и само ако се исполнети следниве услови:

- (i) $0 \in W$ (или $W \neq \emptyset$) и
- (ii) $a, b \in \mathbb{R} \wedge v, w \in W \Rightarrow av + bw \in W$.

Доказ. Нека W е потпростор. Тогаш согласно со горедокажаната теорема имаме $0 \in W$, ($W \neq \emptyset$). Освен тоа од (ii) и (iii) добиваме

$$a, b \in \mathbb{R} \wedge v, w \in W \Rightarrow av \in W \wedge bw \in W \Rightarrow av + bw \in W.$$

Обратно, нека се исполнети условите (i) и (ii). Од (ii) за $a = b = 1$ и за $v, w \in W$ следува дека $1v + 1w = v + w \in W$. Потоа за $b = 0$ добиваме $av + 0w = av \in W$, а посебно, за $a = -1$, $(-1)v \in W$ за секој $v \in W$. W го содржи нултиот вектор, согласно со (i). Исполнети се сите останати услови за векторите од W , како вектори од V , значи W е потпростор. ■

Пример 1. Нека V е векторски простор. Тогаш V и $\{0\}$ се потпростори од V . ♦

Пример 2. Нека $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Тогаш $W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ е потпростор од V . ♦

Пример 3. Нека V е векторски простор од сите полиноми, а W е множеството од полиноми со степен помал или еднаков на даден природен број n . Тогаш W е потпростор од V . ♦

Пример 4. Нека V е векторски простор од сите функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ($X \neq \emptyset$). Множеството W од сите ограничени функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ е потпростор од V (не ограничена функција, ако постои $M \in \mathbb{R}$ така што $|f(x)| \leq M$ за секој $x \in X$). ♦

Теорема 2. Пресекот на конечен број потпростори на векторски простор V е потпростор од V .

Доказ. Нека $W_1, W_2, \dots, W_k$ ($k \geq 2$) се потпростори од V . Тогаш $0 \in W_1, 0 \in W_2, \dots, 0 \in W_k$ и затоа $0 \in W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k$. Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и нека $u, v \in W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n$. Тоа значи дека $u, v \in W_i$, за $i=1, 2, \dots, k$ и оттука $au + bv \in W_i$, за секој $i=1, 2, \dots, k$ бидејќи W_i , $i=1, 2, \dots, k$ се потпростори. Затоа, $au + bv \in W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n$, што значи дека $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_n$ е потпростор од V , согласно со последица 1. ■

Пример 5. Нека $V = \mathbb{R}^3$. Тогаш $U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(0, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$ се потпростори од V . Притоа $U \cap W = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ исто така е потпростор од V . ♦



Задачи за самостојна работа

1. Нека $V = \mathbb{R}^3$. Дали се потпростори од V следните подмножества:

- а) $\{(0, 0, 0)\}$; б) $\mathbb{R}^3$; в) $\{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$; г) $\{(a, b, 0) \mid a^2 + b^2 = 1, a, b \in \mathbb{R}\}$;
 д) $\{(a, b, 0) \mid a + b + 1 = 0, a, b \in \mathbb{R}\}$; е) $\{(a, b, 0) \mid 2a + 3b = 0, a, b \in \mathbb{R}\}$?

2. Нека $U_1 = \{(x, y, z, t) \mid a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = 0\}$ и $U_2 = \{(x, y, z, t) \mid b_1x + b_2y + b_3z + b_4t = 0\}$. Запиши го пресекот $U_1 \cap U_2$ описно.

3. Ако U и W се потпростори од V , дали и $U \cup W$ е потпростор на V ?

4. Ако U, W и $U \cup W$ се потпростори од V , тогаш $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$. Докажи!

5. Нека V е векторскиот простор од сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Кои од следните подмножества се потпростори од V :

- $U_1 = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(5) = 1\}$; $U_4 = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(-x) = -f(x), \text{ за секое } x \in \mathbb{R}\}$;
 $U_2 = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(4) = f(8)\}$; $U_5 = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(-x) = f(x), \text{ за секое } x \in \mathbb{R}\}$;
 $U_3 = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(5) + f(7) = 2\}$; $U_6 = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \text{ за секое } x \in \mathbb{R}\}$?

6. Нека V е векторски простор од сите полиноми, а W е множеството од полиноми чиј степен е еднаков на n . Дали W е потпростор од V ?

4.3. Линеарна комбинација и линеарна покривка

Дефиниција 1. Нека V е векторски простор над $\mathbb{R}$ и нека $v_1, \dots, v_m \in V$ и $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Тогаш векторот $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \in V$ се нарекува **линеарна комбинација** на векторите $v_1, \dots, v_m$ со коефициенти $a_1, \dots, a_m$.

Теорема 1. Нека S е непразно подмножество од векторскиот простор V . Множеството од сите линеарни комбинации на векторите во S , означено со $L(S)$, е потпростор од V што го содржи S . Освен тоа, ако W е произволен потпростор од V што го содржи S , тогаш $L(S) \subseteq W$, т.е. $L(S)$ е најмалиот потпростор што го содржи множеството S .

Доказ. Ако $v \in S$, тогаш $v = 1v \in L(S)$. Од произволноста на v од S следува дека $S \subseteq L(S)$. Освен тоа $L(S) \neq \emptyset$, бидејќи $S \neq \emptyset$.

Нека $v, w \in L(S)$ и нека

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \quad \text{и} \quad w = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_p w_p$$

за некои $v_i, w_j \in S$ и $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,p$. Тогаш за произволни $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, векторот

$$\begin{aligned} k_1 v + k_2 w &= (k_1 a_1) v_1 + \dots + (k_1 a_m) v_m + (k_2 b_1) w_1 + \dots + (k_2 b_p) w_p = \\ &= c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + c_{m+1} w_1 + \dots + c_{m+p} w_p \in L(S) \end{aligned}$$

каде што $c_i = k_1 a_i$, $i=1,2,\dots,m$, $c_{m+j} = k_2 b_j$, $j=1,2,\dots,p$. Од произволноста на $v, w \in L(S)$ и $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, следува дека $L(S)$ е потпростор од V .

Нека W е потпростор од V што го содржи S и нека $v_1, \dots, v_m \in S \subseteq W$. Тогаш $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \in L(S) \subseteq W$ за секое $a_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$ и $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in W$, бидејќи W ги содржи сите линеарни комбинации од елементите на S . Тогаш $L(S) \subseteq W$. ■

Бидејќи $L(S)$ е најмалиот потпростор од V што го содржи S , потпросторот $L(S)$ се вика **потпростор генериран од S** или **покривка на S** . По дефиниција прифаќаме $L(\emptyset) = \{0\}$.

Пример 1. Нека u е вектор во $\mathbb{R}^3$. Потпросторот генериран од $\{u\}$ се состои од сите вектори колинеарни со u т.е. $L\{u\} = \{ku \mid k \in \mathbb{R}\}$. Геометриски тоа е права низ координатниот почеток и колинеарна со u . Ако $S = \{u, v\}$, каде u и v не се колинеарни вектори, тогаш геометриски $L(S)$ претставува рамнина низ координатниот почеток што е паралелна со векторите u и v т.е. $L\{u, v\} = \{k_1 u + k_2 v \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$. ♦

Пример 2. Векторите $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ и $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ го генерираат векторскиот простор $\mathbb{R}^3$. Навистина, за произволен вектор $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ имаме

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3. \quad \blacklozenge$$

Пример 3. Полиномите $1, t, t^2, t^3, \dots$ го генерираат векторскиот простор V од сите полиноми по t , бидејќи секој полином е линеарна комбинација од $1, t, t^2, t^3, \dots$ ♦

Пример 4. Да се испита дали векторот $v = (3, 9, -4, -2) \in \mathbb{R}^4$ припаѓа на покривката генерирана од $S = \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$, каде што $u_1 = (1, -2, 0, 3)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$ и $u_3 = (2, -1, 2, 1)$, значи да се провери дали векторот v е линеарна комбинација од векторите u_1, u_2, u_3 , т.е. дали постојат броеви $x, y, z \in \mathbb{R}$ така што

$$(3, 9, -4, -2) = x(1, -2, 0, 3) + y(2, 3, 0, -1) + z(2, -1, 2, 1) = (x + 2y + 2z, -2x + 3y - z, 2z, 3x - y + z).$$

На тој начин проблемот се сведува на решавање на системот:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -2x + 3y - z = 9 \\ 2z = -4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 7y + 3z = 15 \\ 2z = -4 \\ -7y - 5z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 7y + 3z = 15 \\ 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Значи, $(3, 9, -4, -2) = 1 \cdot (1, -2, 0, 3) + 3 \cdot (2, 3, 0, -1) + (-2) \cdot (2, -1, 2, 1)$ т.е. v е линеарна комбинација од u_1, u_2 и u_3 ($u = u_1 + 3u_2 - 2u_3$). Според тоа векторот v припаѓа на покривката генерирана со векторите u_1, u_2 и u_3 . ♦



Задачи за самостојна работа

1. Дали векторот $v = (-5, 3, 2)$ може да се запише како линеарна комбинација на векторите $v_1 = (-3, 2, 1)$, $v_2 = (-4, -1, 2)$ и $v_3 = (-5, 7, 1)$?

2. Запиши го векторот $v = (5, 0, 1, -2)$ како линеарна комбинација на векторите $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 2, -1)$.

3. За која вредност на параметарот k векторот $v = (1, k, -2)$ може да се запише како линеарна комбинација од векторите $v_1 = (3, -2, 0)$ и $v_2 = (-2, 5, 1)$?

4. Нека V е векторски простор од функции $f: \{5, 7\} \rightarrow \mathbb{R}$. Опиши го потпросторот од V кој е генериран од следните подмножества:

а) $U_1 = \{f | f: \{5, 7\} \rightarrow \mathbb{R}, f(5) = 1\},$

б) $U_2 = \{f | f: \{5, 7\} \rightarrow \mathbb{R}, f(5) = 2f(7)\}.$

5. Напиши го полиномот $P(t) = t^2 + 4t - 3$ како линеарна комбинација од полиномите: $P_1(t) = t + 3$, $P_2(t) = 2t^2 - 3t$ и $P_3(t) = t^2 - 2t + 5$.

6. Ако u е линеарна комбинација од векторите $v_1, v_2, \dots, v_n$, а v_i е линеарна комбинација од векторите $w_1, w_2, \dots, w_m$, за секое $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, докажи дека и u е линеарна комбинација од векторите $w_1, w_2, \dots, w_m$.

4.4. Збир и директен збир на потпростори

Дефиниција 1. Збир на потпросторите U и W од векторскиот простор V е множеството од сите можни суми $u + w$, каде што $u \in U$, $w \in W$ т.е. $U + W = \{u + w \mid u \in U \text{ и } w \in W\}$.

Теорема 1. Збирот $U + W$ на потпросторите U и W од V е потпростор од V .

Доказ. Од $0 \in U$ и $0 \in W$ следува дека $0 = 0 + 0 \in U + W$. Нека $u + w, u' + w' \in U + W$, при што $u, u' \in U$, а $w, w' \in W$ и нека $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Тогаш,

$$k_1(u + w) + k_2(u' + w') = (k_1u + k_2u') + (k_1w + k_2w') = u'' + w'' \in U + W,$$

каде што $u'' = k_1u + k_2u' \in U$, бидејќи U е потпростор, и $w'' = k_1w + k_2w' \in W$, согласно со претпоставката дека W е потпростор. Од произволноста на $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $u + w, u' + w' \in U + W$ следува дека $U + W$ е потпростор. ■

Пример 1. Во векторскиот простор $V = \mathbb{R}^4$ множествата вектори

$$U = \{(s, y, 0, 0) \mid s, y \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(t, 0, z, 0) \mid t, z \in \mathbb{R}\}$$

се потпростори од V . Тогаш

$$U + W = \{(x, y, z, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \text{ и } U \cap W = \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Навистина, $v \in U \cap W$ значи $v = (s, y, 0, 0) = (t, 0, z, 0)$ за некои $s, y, t, z \in \mathbb{R}$. Оттука $s = t$, $y = 0$, $z = 0$, т.е. $v = (s, 0, 0, 0) \in \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Од произволноста на v следува дека $U \cap W \subseteq \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Обратно, $\{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq U \cap W$ бидејќи $(x, 0, 0, 0) \in U$ (за $s = x$ и $y = 0$) и $(x, 0, 0, 0) \in W$ (за $t = x$ и $z = 0$).

Потоа, $v \in U + W$ значи $v = (s, y, 0, 0) + (t, 0, z, 0)$ за некои $s, y, t, z \in \mathbb{R}$ од каде што следува дека $v = (s + t, y, z, 0) \in \{(x, y, z, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$; значи $U + W \subseteq \{(x, y, z, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Обратно $v = (x, y, z, 0) = (x, y, 0, 0) + (0, 0, z, 0) \in U + W$ (за $s = x$, $t = 0$).

Дефинитивно, $U + W = \{(x, y, z, 0) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. ♦

Дефиниција 2. Векторскиот простор V се нарекува **директен збир** на потпросторите U и W , и се означува со $V = U \oplus W$, ако секој вектор v на единствен начин може да се запише во облик $v = u + w$, каде $u \in U$ и $w \in W$.

Теорема 2. Векторскиот простор V е директен збир од потпросторите U и W ако и само ако се исполнети условите:

- (i) $V = U + W$ и (ii) $U \cap W = \{0\}$.

Доказ. Нека $V = U \oplus W$. Тогаш секој вектор v може на единствен начин да се претстави во облик $v = u + w$ за некој $u \in U$ и некој $w \in W$. Од овде $V \subseteq U + W \subseteq V$, што значи $V = U + W$. Потоа, нека $v \in U \cap W$. Тогаш $v = v + 0$ ($v \in U$ и $0 \in W$) и $v = 0 + v$ ($0 \in U$ и $v \in W$) се две претставувања на v и согласно со единственоста, мора да е $v = 0$. Значи, $U \cap W = \{0\}$.

Обратно, нека $V = U + W$ и $U \cap W = \{0\}$. Бидејќи $V = U + W$, за секое $v \in V$ постои барем едно претставување $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$. Нека $v = u' + w'$ каде $u' \in U$ и $w' \in W$ е друго претставување. Тогаш $u + w = u' + w'$, и оттука $u - u' = w' - w$. Меѓутоа, $v' = u - u' \in U$ и истовремено $v' = w' - w \in W$ т.е. $v' \in U \cap W$. Но $U \cap W = \{0\}$, па затоа $v' = 0$, што значи дека $u = u'$, $w = w'$, т.е. претставувањето е единствено. Значи $V = U \oplus W$. ■

Пример 2. Нека $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ се дадени потпростори од $\mathbb{R}^3$. Од $(x, y, z) = (x, y, z, 0) + (0, -z, z) \in U + W$ следува дека $\mathbb{R}^3 = U + W$. Заради $U \cap W = \{(a, -a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$, добиваме дека $\mathbb{R}^3 \neq U \oplus W$. ♦

Пример 3. Нека $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ се дадени потпростори од $\mathbb{R}^3$. Тогаш $\mathbb{R}^3 = U + W$ и $U \cap W = \{0\}$, па според тоа $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Дали за потпросторите $U = \{(x, y, 0, 0) \mid x + 2y = 0\}$ и $W = \{(0, 0, z, t) \mid z + t = 0\}$ од $\mathbb{R}^4$ важи $U + W = \mathbb{R}^4$?

2. Нека U и W се потпростори од векторскиот простор $\mathbb{R}^3$, зададени како што следува $U = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 0\}$ и $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$. Докажи дека $U + W = \mathbb{R}^3$. Дали важи $U \oplus W = \mathbb{R}^3$?

3. Нека U и W се потпростори од векторски простор $\mathbb{R}^3$, зададени со $U = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}$ и $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$. Докажи дека $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

4. Нека U и W се потпростори од векторски простор V . Докажи дека $U + W$ е најмалиот потпростор од V кој како подмножество ги содржи потпросторите U и W .

5. Ако $X = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ го генерира потпросторот U , а $Y = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ го генерира потпросторот W , тогаш $X \cup Y$ го генерира потпросторот $U + W$. Докажи!

6. Докажи дека просторот од сите функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е директен збир на потпросторите $U = \{g \mid g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } g(-x) = -g(x)\}$ и $W = \{h \mid h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } h(-x) = h(x)\}$.

4.5. Линеарна зависност и независност на вектори

Дефиниција 1. Нека V е векторски простор. Векторите $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ се нарекуваат **линеарно зависни**, ако постојат скалари $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, не сите еднакви на нула, така што $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0$.

Векторите коишто не се линеарно зависни се нарекуваат **линеарно независни**.

Забележуваме дека векторите $v_1, v_2, \dots, v_m$ се линеарно независни ако и само ако $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0$ повлекува $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.

Пример 1. Векторите $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ и $w = (5, 3, -2)$ се линеарно зависни бидејќи $3(1, -1, 0) + 2(1, 3, -1) + (-1) \cdot (5, 3, -2) = (0, 0, 0)$, т.е. $3u + 2v + (-1)w = 0$.

Множеството $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ се нарекува **зависно (независно) множество** ако векторите $v_1, v_2, \dots, v_m$ се зависни (независни). По договор, празното множество $\emptyset$ ($m = 0$) е независно.

Пример 2. Докажи дека множеството вектори $X = \{(6, 2, 3, 4), (0, 5, -3, 1), (0, 0, 7, -2)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ е линеарно независно.

Од $x(6, 2, 3, 4) + y(0, 5, -3, 1) + z(0, 0, 7, -2) = (6x, 2x + 5y, 3x - 3y + 7z, 4x + y - 2z) = (0, 0, 0, 0)$, имаме

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ 2x + 5y = 0 \\ 3x - 3y + 7z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

од каде што следува дека $x = y = z = 0$, значи даденото множество вектори X е линеарно независно. ♦

Ќе предочиме некои својства на линеарно зависните (независните) множества вектори:

1° Множество што се состои од ненулта вектор, $X = \{v\}$, ($v \neq 0$) е линеарно независно, бидејќи од $av = 0$, за $v \neq 0$ следува дека $a = 0$.

2° Секое множество вектори што го содржи нултиот вектор $\{0, v_1, v_2, \dots, v_m\}$ е линеарно зависно, бидејќи $1 \cdot 0 + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m = 0$, за произволно дадени вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$.

3° Секое множество вектори што содржи линеарно зависно подмножество е линеарно зависно. Навистина, ако $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$ е множество вектори чиешто подмножество $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ е линеарно зависно, тогаш постојат скалари $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, од кои барем еден е различен од нула, така што важи $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0$. Тогаш

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + 0v_{k+1} + \dots + 0v_m = 0.$$

4° Секое подмножество од линеарно независно множество е линеарно независно, што е директна последица од 3°.

Теорема 1. Ненултите вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ се линеарно зависни, ако и само ако меѓу нив постои вектор v_i , којшто е линеарна комбинација од нему претходните вектори, $v_i = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_{i-1} v_{i-1}$.

Доказ. Нека $v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{i-1} v_{i-1}$. Тогаш е точно дека

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + (-1)v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_m = 0 \text{ и } (-1) \neq 0,$$

т.е. дадените вектори се линеарно зависни.

Обратно, нека $v_1, v_2, \dots, v_m$ се линеарно зависни. Тогаш постојат скалари $a_1, a_2, \dots, a_m$ не сите еднакви на нула, така што $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$. Нека $k \leq m$ е најголемиот индекс за којшто $a_k \neq 0$. Тогаш $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + 0v_{k+1} + \dots + 0v_m = 0$.

Претпоставката $k=1$, значи дека $a_1 v_1 = 0$ т.е. $a_1 = 0$ или $v_1 = 0$ што претставува противречност. Значи $k > 1$. Тогаш $v_k = -\frac{a_1}{a_k} v_1 - \frac{a_2}{a_k} v_2 - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} v_{k-1}$. ■

Како последица од теоремата имаме дека $v_1, v_2, \dots, v_m$ се линеарно зависни, ако и само ако некој од нив е линеарна комбинација од останатите вектори.



Задачи за самостојна работа

- Испитај дали се линеарно зависни или независни векторите:
 - $(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,1,0)$; б) $(1,1,-2,1), (2,0,1,-3), (1,1,-2,-1), (4,2,-3,-3)$;
 - $(0,a,b), (-a,0,c), (-b,-c,0)$; г) $(0,1,2,1,1), (0,0,1,1,0), (1,0,0,2,-2), (0,0,0,0,3)$.
- Испитај дали се линеарно зависно или независно, во векторскиот простор од сите полиноми, множеството полиноми:
 - $1+2t-3t^2, 3t+4t^2, 2+5t^2$;
 - $2-2t-3t^2, 1+2t-3t^2, 3t+2t^2-3t^3, 1-4t-3t^2+3t^3$.
- Најди го параметарот λ за кој што векторите $(2,0,3), (3,1,1)$ и $(-\lambda, 7, \lambda-1)$ се линеарно зависни.
- Докажи дека, ако два од векторите $v_1, v_2, \dots, v_m$ се еднакви, тогаш векторите се линеарно зависни.
- Докажи дека, два вектора u и v се зависни, ако еден од нив е скаларен мултипл на другиот.
- Докажи дека, ако множеството $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ е независно, тогаш при произволно пренумерирање на неговите вектори, $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}$, тоа е пак независно.

7. Докажи дека условот за линеарна зависност во просторот $\mathbb{R}^3$, гласи:

- а) Два вектора u и v се зависни, ако постои права која е паралелна на секој од нив.
- б) Три вектори u, v, w се зависни, ако постои рамнина паралелна на секој од нив.

4.6. База и димензија

Дефиниција 1. За векторскиот простор V велиме дека има конечна димензија n , или дека е n -димензионален и пишуваме $\dim V = n$, ако постојат линеарно независни вектори $v_1, v_2, \dots, v_n$ така што $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ го генерира V . Множеството B се нарекува база на векторскиот простор V .

За да биде добро дефиниран поимот димензија е неопходно да докажеме дека бројот n не зависи од изборот на базата. Доказот на ова тврдење е заснован на следнава теорема.

Теорема 1. Нека $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ го генерира векторскиот простор V . Ако $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ е линеарно независно множество од V , тогаш $m \leq n$ и V е генерирано со множество од облик $\{w_1, w_2, \dots, w_m, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n-m}}\}$. Секое множество што содржи повеќе од n вектори од V е линеарно зависно.

Забелешка 1. Теоремата тврди дека секое линеарно независно множество од вектори во векторскиот простор V може да се дополни до база на V со внесување на нови вектори.

Доказ.* Бидејќи множеството вектори

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

го генерира V , векторот w_1 може да се претстави како линеарна комбинација од векторите $v_1, v_2, \dots, v_n$, од каде што следува дека множеството

$$\{w_1, v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

е линеарно зависно и исто така го генерира V . Тогаш барем еден вектор од множеството

$$\{w_1, v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

е линеарна комбинација од претходните. Притоа да забележиме дека тоа не може да биде векторот w_1 , туку некој вектор v_i е линеарна комбинација од векторите $w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$. Тогаш множеството

$$\{w_1, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

исто така го генерира V .

Слично, заклучуваме дека множеството

$$\{w_1, w_2, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

е зависно и го генерира V . Тогаш барем еден вектор од множеството

$$\{w_1, w_2, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

е линеарна комбинација од претходните. Повторно забележуваме дека тоа не може да бидат векторите w_1 и w_2 бидејќи $\{w_1, w_2\}$ е линеарно независно множество. Значи, некој вектор v_k ($k \neq i$) е линеарна комбинација од векторите $w_1, w_2, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}$. Тогаш множеството

$$\{w_1, w_2, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

исто така го генерира V .

Оваа постапка може да се повтори m пати, се додека множеството $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ не се исцрпи. Во секој чекор отфрламе по еден вектор од множеството $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, што значи дека по m -тиот чекор генераторното на V има барем m елементи, т.е. $m \leq n$. Множеството $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ не може да се исцрпи пред да бидат внесени сите вектори $w_1, w_2, \dots, w_m$ бидејќи тоа ќе противречи на линеарната независност на векторите $w_1, w_2, \dots, w_m$. ■

Пример 1. Векторите $(3,1,1)$ и $(-3,7,2)$ се линеарно независни. Кон овие вектори го допишуваме нивниот векторскиот производ $(3,1,1) \times (-3,7,2) = (-5, -9, 24)$. Овие три вектори формираат база во $\mathbb{R}^3$. Наместо векторот $(-5, -9, 24)$ може да избереме и многу други, на пример векторот $(1,0,0)$ за да добиеме база. Но, ако кон овие три вектори допишеме четврт вектор, тој е сигурно линеарна комбинација од трите вектори, па според тоа ќе добиеме линеарно зависно множество вектори. ♦

Како последица на претходната теорема ја добиваме следната важна теорема:

Теорема 2. Нека V е векторски простор со конечна димензија. Тогаш секоја база на V има ист број елементи.

Доказ. Нека $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е база на V и нека $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ е друга база на V . Бидејќи $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ го генерира V , а $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ е независно множество, според претходната теорема мора да важи $m \leq n$. Од друга страна пак, бидејќи $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ го генерира V , а $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е независно множество, според претходната теорема мора да важи $n \leq m$. Според тоа $m = n$. ■

Векторскиот простор $\{0\}$ се смета дека има димензија нула бидејќи $\emptyset$ е единствено негово линеарно независно множество. Еден векторски простор којшто нема конечна димензија т.е. не е конечно димензионален се нарекува бесконечно димензионален векторски простор.

Од дефиницијата за база на векторски простор непосредно следува дека ако $v_1, v_2, \dots, v_n$ е база за V , тогаш секој вектор v еднозначно се запишува како линеарна комбинација од базните вектори, односно

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Имено, од фактот дека $v_1, v_2, \dots, v_n$ го генерира V , следува егзистенција на скалари $a_1, a_2, \dots, a_n$ така што $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, а од линеарната независност на векторите $v_1, v_2, \dots, v_n$ следува единственост на скаларите $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Пример 2. Да го разгледаме векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ што се состои од подредени n -торки реални броеви. Векторите

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

формираат база на $\mathbb{R}^n$, па тој е n -димензионален векторски простор. ♦

Пример 3. Нека W е множеството од полиноми по t со степен помал или еднаков од n . Множеството $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ е линеарно независно и го генерира W . Затоа тоа е база за W и $\dim W = n + 1$. Множеството од сите полиноми е бесконечно димензионален векторски простор. Навистина, ако има конечна димензија r , тогаш произволни $r + 1$ полиноми, на пример $1, t, \dots, t^r$ би требало да се линеарно зависни вектори. Меѓутоа, овие полиноми се линеарно независни. Навистина, ако за некои коефициенти $a_0, a_1, \dots, a_r$ полиномот $a_0 + a_1 t + \dots + a_r t^r$ е нулти полином, тој добива вредност 0 за секоја вредност на t , па тогаш коефициентите $a_0, a_1, \dots, a_r$ мора да се еднакви на нула. Значи заклучокот дека $1, t, \dots, t^r$ се линеарно зависни е погрешен, па погрешна е и претпоставката, дека тој векторски простор има конечна димензија. ♦

Теорема 3. Нека V е векторски простор со конечна димензија n . Тогаш важат следниве тврдења:

- (i) секое множество од $n + 1$ или повеќе вектори е зависно;
- (ii) секое независно множество може да се прошири до база;
- (iii) секое линеарно независно множество од n елементи претставува база.

Доказ. Нека $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е база за V .

(i) Ако постои некое множество од $n + 1$ вектори што е линеарно независно, тогаш димензијата на V е поголема или еднаква на $n + 1$. Тоа противречи на фактот дека димензијата на V е n .

(ii) Нека $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ е независно множество од вектори. Тогаш V е генерирано од множество од облик

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_r, e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Ако некој од векторите e_i е линеарна комбинација од останатите вектори, добиваме подмножество што го генерира V . Со отфрлање на сите такви вектори e_i , се добива линеарно независно множество што го генерира V . Добиеното множество е база на V и го содржи даденото множество $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ од независни вектори.

(iii) Според (ii) едно независно множество T со n елементи е дел од база. Но секоја база на V содржи n елементи. Затоа T е база. ■

Пример 4. Лесно се проверува дека четирите вектори во $\mathbb{R}^4$:

$(1,1,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,1,1)$ и $(0,0,0,1)$

се линеарно независни. Бидејќи $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, тие формираат база за $\mathbb{R}^4$. ♦

Пример 5. Четирите вектори во $\mathbb{R}^3$:

$(127, -132, 58)$, $(43, 0, -17)$, $(521, -317, 94)$, $(328, 512, 731)$

се линеарно зависни, бидејќи се елементи на векторски простор со димензија 3. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Провери дали формираат база на $\mathbb{R}^3$ следните вектори
 - а) $(1, 2, -3)$, $(2, 2, 5)$;
 - б) $(1, 2, 3)$, $(-1, 0, 1)$, $(3, -1, 0)$;
 - в) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$;
 - г) $(1, 2)$, $(5, 3, 4)$, $(1, 2, 5)$.
2. Најди ја димензијата на векторскиот потпростор $V \subseteq \mathbb{R}^4$ генериран од векторите:
 - а) $(2, 2, -3, 0)$, $(-2, 2, -3, 0)$;
 - б) $(-3, 6, -3, 9)$, $(-2, 4, -2, 6)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$.
3. Најди база и утврди ја димензијата на векторскиот потпростор V , од векторскиот простор на полиноми, генериран со полиномите:

$$P_1(t) = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad P_2(t) = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5,$$

$$P_3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \quad P_4(t) = t^3 + 6t - 5.$$
4. Докажи дека полиномите 1 , $1+t$, $(1+t)^2$, $(1+t)^3$ формираат база за векторскиот простор на полиноми од степен помал или еднаков на три.
5. Докажи дека ако векторите v_1, v_2, v_3 и v_4 претставуваат база на некој векторски простор, тогаш и векторите
 - а) kv_1, kv_2, kv_3 и kv_4 ($k \neq 0$),
 - б) $v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3 - v_4$ и $v_3 + v_4$,
 формираат исто така база за тој векторски простор.
6. Нека U е потпростор од $\mathbb{R}^4$ генериран со векторите $(2, 3, 1, -4)$, $(-3, -8, 3, 5)$, $(1, -2, 5, -3)$.
 - а) Најди база и димензија на U ,
 - б) Прошири ја базата на U до база на целиот простор $\mathbb{R}^4$.
7. Нека W е потпростор од n -димензионален векторски простор V . Докажи дека $\dim W \leq n$ и освен тоа, ако $\dim W = n$ тогаш $W = V$.

4.7. Координати на вектор

Нека множеството $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е база на n -димензионалниот векторски простор V и нека $v \in V$. Бидејќи множеството $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ го генерира просторот V , векторот v е линеарна комбинација од векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$, т.е. постојат скалари $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ така што

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Освен тоа, претставувањето е единствено, бидејќи ако постои и друго претставување

$$v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n,$$

тогаш од равенството на левите страни, следува равенство и на десните страни и оттука

$$(b_1 - a_1)e_1 + (b_2 - a_2)e_2 + \dots + (b_n - a_n)e_n = 0.$$

Бидејќи векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$ формираат база тие се линеарно независни, и затоа $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \dots = b_n - a_n = 0$, т.е. $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Значи векторот v може да се претстави на единствен начин како линеарна комбинација од базните вектори. Со други зборови реалните броеви $a_1, \dots, a_n$ се еднозначно определени со векторот v во однос на базата $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и се нарекуваат **координати** на векторот v во однос на базата $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, а подредената n -торка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ **координатен вектор** на v во однос на базата $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и пишуваме

$$[v]_e = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

или само $[v] = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, ако базата се подразбира.

Пример 1. Нека $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$, и $v = (3, 1, -4)$. Множеството $\{e_1, e_2, e_3\}$ е база во $\mathbb{R}^3$ па постојат единствени реални броеви x, y, z така што

$$(3, 1, -4) = x(1, 1, 1) + y(0, 1, 1) + z(0, 0, 1) = (x, x + y, x + y + z)$$

Тогаш координатите на векторот v во однос на базата $\{e_1, e_2, e_3\}$ се решенијата на системот

$$\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 1 \\ x + y + z = -4 \end{cases},$$

односно $[v]_e = (3, -2, -5)$ е координатниот вектор на v во однос на дадената база. ♦

Пример 2. Нека $V = \{at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ е векторскиот простор од полиноми со степен најмногу 2. Полиномите $e_1 = 1$, $e_2 = t - 1$ и $e_3 = (t - 1)^2$ формираат база за просторот V . Тогаш за полиномот $v = 2t^2 - 5t + 6$ постојат единствени реални броеви x, y, z така што

$$2t^2 - 5t + 6 = x1 + y(t - 1) + z(t^2 - 2t + 1) = zt^2 + (y - 2z)t + (x - y + z).$$

Координатите на векторот v во однос на базата $\{e_1, e_2, e_3\}$ се решенијата на системот

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ y - 2z = -5 \\ z = 2 \end{cases},$$

односно $[v]_e = (3, -1, 2)$ е координатниот вектор на v во однос на дадената база. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Најди ги координатите на векторот $v = (4, 2, 1)$ од $\mathbb{R}^3$ во однос на базата $\{(1, 1, 0), (0, 1, -2), (2, 1, -1)\}$.
2. Најди ги координатите на векторот $v = (a, b, c, d)$ од $\mathbb{R}^4$ во однос на базата $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$.
3. Нека V е векторскиот простор од сите полиноми со степен најмногу 3. Најди ги координатите на полиномот $P(t) = -t^2 + t + 1$ во однос на базата определена со полиномите $P_1(t) = 2t^3 - t^2 + t - 2$, $P_2(t) = t^3 + t^2 + t$, $P_3(t) = t^3 - 1$.
4. Најди ги координатите на векторот v во однос на базата $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, ако
 - а) $v = (1, -2, 3)$;
 - б) $v = (a, b, c)$.
5. Нека секој вектор во векторскиот простор V може да се изрази како линеарна комбинација од векторите a, b, c , а векторот v само на еден начин. Покажи дека секој вектор од V може да се изрази само на еден начин како линеарна комбинација од векторите a, b, c .

Задачи за вежбање

1. Нека $V = \mathbb{R}^2$. Покажи дека V претставува векторски простор во однос на следните операции:

а) $(a, b) + (c, d) = (a + d, b + c)$	к) $k(a, b) = (ka, kb)$;
б) $(a, b) + (c, d) = (0, 0)$	к) $k(a, b) = (ka, kb)$;
в) $(a, b) + (c, d) = (ac, bd)$	к) $k(a, b) = (ka, kb)$.
2. Дали множеството вектори од просторот чиешто модули се најмногу 1, претставува векторски потпростор во однос на вообичаените операции со вектори?
3. Дали множеството вектори од $\mathbb{R}^4$ за кои збирот на координатите е еднаков на:
 - а) 0;
 - б) 1
 претставува векторски потпростор од $\mathbb{R}^4$?

4. Дали подмножеството U е потпростор од просторот $\mathbb{R}^3$, ако U е множеството од вектори чија почетна точка е во координатниот почеток, а крајната точка лежи на

а) правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$; б) правата $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$;

в) рамнината $2x + 3y - 4z = 3$; г) рамнината $3x - 2y + z = 0$?

5. Да се најде $U \cap W \subseteq \mathbb{R}^3$ ако:

а) $U = \{(a, b, c) \mid a = b, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$;

б) $U = \{(a, b, 0) \mid a = b, a, b \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(0, b, c) \mid b = c, b, c \in \mathbb{R}\}$.

6. Најди $U + W \subseteq \mathbb{R}^3$ ако:

а) $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$,

б) $U = \{(a, b, 0) \mid a = b, a, b \in \mathbb{R}\}$ и $W = \{(0, b, c) \mid b = c, b, c \in \mathbb{R}\}$.

7. Во $\mathbb{R}^3$ најди $U \cap W$ и $U + W$, ако $U = L(\{(3, 1, 1), (2, -1, 1)\})$ и $W = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

8. Векторскиот простор $\mathbb{R}^4$ претстави го како директен збир $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ каде што $U = \{x(1, 1, 1, 1) + y(0, 1, 0, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

9. Ако U , W_1 и W_2 се потпростори од векторскиот простор V , докажи дека

$$(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2).$$

10. Провери дали следното множество вектори претставува база на просторот $\mathbb{R}^3$:

а) $\{(0, -1, 1), (2, -3, -5), (-1, 3, 1)\}$; б) $\{(5, -1, 2), (-2, 3, -1), (-3, 2, 1)\}$,

в) $\{(2, 2, -4), (-2, -1, 2), (1, -1, 2)\}$; г) $\{(3, 1, 1), (-1, 2, -1), (2, 3, 0)\}$.

11. Ако $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ претставува база на некој векторски простор, дали и векторите:

а) $v_1 + v_2, v_2 + v_3$ и $v_3 + v_4$, б) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_1 + v_4, v_1 + v_2 + v_3 + v_4$,

формираат исто така база за тој векторски простор?

12. Нека $S \subseteq V$ (V е векторски простор). За множеството $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ велиме дека е **максимално независно подмножество** од S , ако

(i) тоа е независно подмножество од S и

(ii) $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v\}$ е зависно за произволен $v \in S$.

Нека S го генерира векторскиот простор V и нека $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ е максимално независно подмножество од S . Докажи дека $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ е база на V .

13. Во $\mathbb{R}^4$ дадени се векторите $(1, 2, 1, 1)$, $(1, 1, 3, 0)$ и $(1, 3, -1, 2)$.

а) Изрази ги векторите $(3, 3, 9, 0)$ и $(0, -5, 10, -5)$ како нивни линеарни комбинации.

- б) Најди една база на потпросторот генериран од дадените вектори.
- 14.** Најди ја димензијата на потпросторот од $\mathbb{R}^4$ генериран со векторите
 а) $(1,2,3,4)$, $(2,3,3,2)$, $(-1,-1,0,1)$, б) $(1,2,3,4)$, $(1,1,1,1)$, $(3,4,5,6)$, $(-1,0,1,2)$.
- 15.** Најди ја димензијата на потпросторот од $\mathbb{R}^5$ генериран со векторите
 $(1,1,1,1,0)$, $(2,2,0,0,-1)$, $(1,1,5,5,2)$, $(1,-1,-1,0,0)$, $(-1,-1,1,1,1)$.
- 16.** Најди ја димензијата на потпросторот од просторот на полиноми генериран со полиномите:
 а) $t^3 + 2t^2 + 3t - 2$ и $3t^3 + 6t^2 + 9t - 6$;
 б) $t^3 + 2t^2 + 4t + 1$ и $3t^2 + 2t - 1$.
- 17.** Конструирај векторски потпростори U и W од некој векторски простор V со $\dim V \geq 6$ така што $\dim U = 3$ и $\dim W = 2$ (ако такви постојат) и при тоа
 а) $\dim(U + W) = 4$; б) $\dim(U + W) = 5$; в) $\dim(U + W) = 6$.
- Во секој случај најди ја $\dim(U \cap W)$.
- 18*.** Нека U и W се конечно димензионални потпростори од векторскиот простор V . Докажи дека $U + W$ е конечно димензионален векторски простор и

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$
 Во специјален случај ако $V = U \oplus W$, тогаш $\dim V = \dim U + \dim W$.
- 19.** Нека U и W се векторски потпростори од $\mathbb{R}^6$ такви што $\dim U = 4$ и $\dim W = 5$. Докажи дека $3 \leq \dim(U \cap W) \leq 4$.
- 20.** Покажи дека векторите
 $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,0,1,1)$, $a_3 = (1,0,0,4)$, $a_4 = (0,0,0,2)$,
 формираат база на векторскиот простор $\mathbb{R}^4$. Најди ги координатите на стандардната база $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ во однос на базата a_1, a_2, a_3, a_4 .

PROSVETNO DELO

5.1. Линеарни равенки со повеќе непознати и систем линеарни равенки

Теоријата на системи линеарни равенки претставува важен дел од линеарната алгебра во која се изучуваат конечно димензионални простори. Имено, голем број проблеми во линеарната алгебра се сведуваат на решавање систем линеарни равенки. Во првата тема веќе се запознавме со системи од две и три линеарни равенки со две и три променливи. Овде ќе продолжиме со проучување на произволен систем линеарни равенки со произволен број непознати.

А) Линеарни равенки

Под **линеарна равенка** со n непознати $x_1, x_2, \dots, x_n$ подразбираме равенка од облик

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \quad (1)$$

каде што $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ се дадени реални броеви наречени **коэффициенти** и **слободен член** на равенката, соодветно. За вредностите на непознатите $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$ велиме дека претставуваат **решение** на равенката (1), ако важи равенството

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = b.$$

Се вели уште дека вредностите $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$ ја задоволуваат равенката. Решението го запишуваме како n -торка $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и можеме да го интерпретираме како вектор во $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. Да ја разгледаме равенката $x + 2y - 4z + t = 3$. Подредената четворка $u = (3, 2, 1, 0)$ е решение на равенката бидејќи $3 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3$, додека четворката $v = (1, 2, 4, 1)$ не е нејзино решение, бидејќи $1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 1 = -10 \neq 3$. Очигледни решенија на равенката се подредените четворки $(3, 0, 0, 0), \left(0, \frac{3}{2}, 0, 0\right), \left(0, 0, -\frac{3}{4}, 0\right), (0, 0, 0, 3)$. ♦

Да се реши равенката значи да се најде множеството од сите n -торки $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ што ја задоволуваат равенката. При решавање на равенката (1) наидуваме на следниве три случаи.

Случај I Ако барем еден од коэффициентите a_i е ненулти, на пример $a_1 \neq 0$, тогаш равенката (1) е еквивалентна со

$$a_1 x_1 = b - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n$$

и со

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} x_n.$$

Посебно, ако $n = 1$ ја имаме равенката $ax = b$ ($a \neq 0$) која има единствено решение $x = \frac{b}{a}$.

Случај II Ако сите коефициенти во равенката (1) се нули, а $b \neq 0$, тогаш добиваме

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$$

Случај III Ако сите коефициенти во равенката (1) се нули и $b = 0$, тогаш равенката (1) гласи

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

Б) Систем линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

Ако во (2) барем еден слободен член е различен од нула, тогаш системот линеарни равенки

Обратно, ако претпоставиме дека $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ е решение на системот (4), односно релациите (6) се точни бројни равенства, тогаш со додавање на првото равенство помножено со $-k$ на второто равенство ги добиваме равенствата (5), што значи $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ е решение на системот (2). ■

Пример 3. Ако првата равенка од системот $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ помножена со -1 ја додадеме на втората равенка го добиваме системот $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Понатаму ако втората равенка на добиениот систем ја помножиме со -1 и ја додадеме на првата равенка го добиваме системот $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Решение на последниот систем е подредениот пар $(0, 0)$. Бидејќи тој е еквивалентен со почетниот заклучуваме дека решение на дадениот систем е парот $(0, 0)$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Реши ги равенките:

а) $x + 2y - 3z + 2u = 4$;

б) $2x + 2y - 3z + 2u = 4$.

2. Состави линеарна равенка која

а) е противречна; б) има единствено решение; в) има бескрајно многу решенија.

3. Покажи дека множеството решенија на равенката

а) $2x + 4y - 5z = 0$;

б) $3x + 2y + z + 3u = 0$;

в) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0$

претставува потпростор од $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^n$, соодветно. Најди ги димензиите на овие потпростори?

4. Дали се еквивалентни системите:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$,

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$?

5. Нека u е партикуларно решение на нехомогениот систем (2) и нека w е решение на асоциираниот хомоген систем (3). Докажи дека $u + w$ е решение на системот (2), и освен тоа секое решение на системот (2) може да се претстави како $u + w$ за некое решение w на хомогениот систем (3).

6. Подредената тројка $(0, 0, 1)$ е едно решение на системот равенки $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$.

Запиши го општото решение на дадениот систем, знаејќи дека $(3t, -t, -2t)$ е решение на соодветниот хомоген систем.

5.2. Гаусов метод за решавање на систем линеарни равенки

Гаусовиот метод на елиминација за решавање на систем линеарни равенки се карактеризира со извонредна ефикасност и едноставност. Иако се изминати околу 200 години откако Гаус го предложил овој метод, до денес не е пронајдена постапка за решавање на систем линеарни равенки со помал број операции од Гаусовиот метод. Овој метод веќе го користевме при решавањето на системи линеарни равенки со две односно со три непознати. Сега ќе го разгледаме алгоритмот за решавање на систем од повеќе линеарни равенки со многу непознати.

Нека е даден систем од m линеарни равенки со n – непознати:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \quad (1)$$

Чекор 1. Претпоставуваме дека $a_{11} \neq 0$. Ако $a_{11} = 0$, тогаш првата равенка од системот ја заменуваме со равенка од системот кај која коефициентот пред x_1 е различен од нула, а потоа со промена на индексите на коефициентите добиваме систем, еквивалентен на дадениот, во кој коефициентот $a_{11} \neq 0$.

Чекор 2. За секој $i > 1$ за кој $a_{ii} \neq 0$ се применува трансформацијата:

$$L_i \rightarrow -a_{ij}L_j + a_{ji}L_j,$$

т.е. кон i –тата равенка помножена со a_{11} , се додава првата равенка помножена со $-a_{1i}$; првата равенка останува неизменета.

Со овој чекор се добива еквивалентен систем на почетниот од облик

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(l)}x_2 + a_{m3}^{(l)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(l)}x_n &= b_m^{(l)} \end{aligned} \quad (2)$$

и притоа $a_{11} \neq 0$.

Со изоставување на првата равенка, се добива потсистем со $m-1$ равенки и $n-1$ непознати. Притоа:

1^o ако добиениот потсистем содржи равенка од облик $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b, b \neq 0$ тогаш системот (2) е противречен што значи дека и системот (1) е противречен;

2° ако добиениот систем содржи равенка од облик $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, тогаш таа равенка се брише како излишна и бројот на равенки се намалува за 1.

Чекорот 2 може да се повторува, ако претходно не е откриена противречност на системот, сè додека не се добие потсистем составен од една, r -та равенка; каде што $r \leq \min\{m, n\}$. Притоа, да претпоставиме дека не е откриена противречност и дека со помош

на i -тата равенка е елиминирана непознатата x_i од $i+1$ -та равенка до последната равенка.

Случај I $r = n \leq m$.

Ако $n < m$, тогаш последните $m - n$ равенки се сведуваат на идентитети и може да изостават како излишни (согласно со претпоставката дека не е откриена противречна равенка). Затоа, може да сметаме дека имаме случај $r = n = m$ што значи дека е добиен еквивалентен на (1) систем од облик

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)} \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \quad (3')$$

во којшто $a_{11} \neq 0$ и $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$, $i = 2, \dots, n$. Системот (3') (значи и системот (1)) има единствено решение $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ т.е. множеството решенија е едноелементно, и неговите компоненти може да се добијат во следниов редослед. Прво се пресметува вредноста u_n на непознатата x_n од последната равенка на системот (3'):

$$u_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

и потоа се пресметуваат останатите компоненти по формулата

$$u_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} u_j}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Случај II $r = m < n$.

Добиен е систем еквивалентен на (1) од облик

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m + a_{2,m+1}^{(1)}x_{m+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ a_{mm}^{(m-1)}x_m + a_{m,m+1}^{(m-1)}x_{m+1} + \dots + a_{mn}^{(m-1)}x_n = b_m^{(m-1)} \end{cases} \quad (3'')$$

во којшто $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$, $i = 2, \dots, m$.

Во овој случај системот (3'') (и почетниот систем (1)) има бескрајно многу решенија и општото решение може да се добие на следниов начин.

За непознатите $x_{m+1}, \dots, x_n$ се избираат произволни вредности $t_{m+1}, \dots, t_n$, соодветно и потоа се определуваат вредности t_i за x_i , $i = m, m-1, \dots, 1$ по формулата

$$t_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} t_j}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad i = m, m-1, \dots, 2, 1.$$

Случај III $r < m \leq n$.

Ако не е откриена противречност, тогаш последните $m - r$ равенки на системот се излишни така што почетниот систем е еквивалентен со системот

[illegible]

каде што $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$, $i = 2, \dots, r$, така што за непознатите $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ може да се изберат произволни вредности $t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n$ и да се најдат вредности на останатите променливи по формулата

$$t_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} t_j}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Пример 1. Да го решиме со примена на Гаусов метод следниов систем:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Бидејќи $a_{11} = 2 \neq 0$ со помош на првата равенка може да се елиминира x_1 од втората, третата и четвртата равенка. Со соодветни елементарни трансформации се добива еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 - 11x_3 = -10 \\ -3x_2 + 5x_3 = 2 \\ 6x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}$$

Сега коефициентот пред x_2 во втората равенка е различен од нула ($a_{22}^2 \neq 0$) и користејќи го тоа може да се елиминира x_2 од третата и од четвртата равенка со извршување на соодветните елементарни трансформации. Се добива еквивалентниот на двата погорни системи линеарни равенки

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 - 11x_3 = -10 \\ -28x_3 = -28 \\ 71x_3 = 71 \end{cases}$$

Овој систем очигледно е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - 11x_3 = -10 \\ x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

во којшто едната од последните две равенки е излишна и може да се изостави. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 - 11x_3 = -10 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

којшто има единствено решение

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = -10 + 11 \cdot 1 = 1$$

$$x_1 = \frac{6 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1}{2} = 1.$$

Значи (1,1,1) е единствено решение на почетниот систем. ♦

Пример 2. Без посебен коментар следува решавање со Гаусовиот метод на системот

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

Со соодветни елементарни трансформации се добиваат последователно следниве еквивалентни меѓусебе и со појдовниот систем линеарни равенки:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 4 \\ -5x_2 + x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 2 \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 10x_5 = 16 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 4 \\ -5x_2 + x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 2 \\ -2x_3 + 10x_4 + 4x_5 = 18 \end{cases}$$

Системот има бескрајно многу решенија. Со избор на произволни вредности t_1 , t_2 за x_4 и x_5 ,

$$x_4 = t_1$$

$$x_5 = t_2,$$

прво од третата равенка на последниот систем се добива

$$x_3 = \frac{18 - 10t_1 - 4t_2}{-2} = -9 + 5t_1 + 2t_2.$$

Потоа од втората равенка се добива

$$x_4 = \frac{2 - (-9 + 5t_1 + 2t_2) - 3t_1 + 6t_2}{-5} = -\frac{11}{5} + \frac{8}{5}t_1 - \frac{4}{5}t_2.$$

На крајот, од првата равенка се добива

$$x_1 = \frac{4 - \left(\frac{11}{5} + \frac{8}{5}t_1 - \frac{4}{5}t_2\right) - 3(-9 + 5t_1 + 2t_2) + t_1 - 4t_2}{2} = \frac{83}{5} - \frac{78}{5}t_1 - \frac{46}{5}t_2.$$

Множеството решенија може да се запише во компонентна форма

$$\left\{ \left(\frac{83}{5} - \frac{78}{5}t_1 - \frac{46}{5}t_2, -\frac{11}{5} + \frac{8}{5}t_1 - \frac{4}{5}t_2, -9 + 5t_1 + 2t_2, t_1, t_2 \right) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}. \blacklozenge$$

Пример 3. За решавањето на системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases}$$

се извршуваат соодветните елементарни трансформации со кои се добиваат последователно следниве еквивалентни системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Со избор на произволни вредности a и b за непознатите x_2 и x_4 , соодветно, т.е. за $x_2 = a$, $x_4 = b$ и наоѓање на вредности за x_3 и x_1 по формулите

$$x_3 = 1 + 2b$$

$$x_1 = 2 - 2a + 2(1 + 2b) - 3b = 4 - 2a + b$$

се добива општото решение во вид:

$$\{(4 - 2a + b, 1 + 2b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \blacklozenge$$

Пример 4. Да го разгледаме системот од две равенки со три непознати:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

каде што барем еден $a_{1j} \neq 0$ ($1 \leq j \leq 3$) и барем еден $a_{2j} \neq 0$ ($1 \leq j \leq 3$).

Нека, на пример, без да се изгуби од општоста $a_{11} \neq 0$. Тогаш со соодветни елементарни трансформации системот може да се сведе во еквивалентен облик

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ \left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 = b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Случај 1. $a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} = 0$, $a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} = 0$, $b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \neq 0$.

Втората равенка очигледно претставува противречност што значи дека системот е проитивречен т.е. нема ни едно решение.

Геометриски двете равенки на системот претставуваат рамнини во просторот со координатен систем $O_{x_1x_2x_3}$. Непостоенето решение на системот во овој случај значи празен пресек на двете рамнини т.е. нивна паралелност. Притоа забележуваме дека погорните релации се еквивалентни на познатите услови за паралелни рамнини во просторот:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}} \neq \frac{b_2}{b_1}.$$

Случај 2. $a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} = 0$, $a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} = 0$, $b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} = 0$.

Втората равенка претставува идентитет $0=0$ и е излишна така што множеството решенија на системот е еднакво на множеството решенија на првата равенка, која што геометриски претставува рамнина. И навистина погорните релации може да се запишат во облик

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}} = \frac{b_2}{b_1}$$

кој што веќе ни е познат како услов за совпаѓање на две рамнини во просторот.

Случај 3. $a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \neq 0$ или $a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} \neq 0$.

Нека, на пример, $a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \neq 0$. Сега втората равенка може да се реши по x_2 , т.е.

дадениот систем да се замени со еквивалентен систем

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 + \frac{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}x_3 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

којшто со воведување на соодветни ознаки го има обликот

чиешто општо решение е

$$\{(b_1 - a'_{12}b_2) + (a'_{12}a_{23} - a'_{13})x_3, b'_2 - a'_{23}x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

и претставува права во просторот, еднаква на пресекот на рамнините, претставени со двете равенки и кои ниту се паралелни ниту се совпаѓаат. ♦

Гаусовиот метод на елиминација може да се примени и за решавање на хомоген систем линеарни равенки.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \blacktriangleleft \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

чиешто множество решенија секогаш е непразно, бидејќи то содржи барем нултото решение $(0, 0, \dots, 0)$. Ако хомогениот систем има ненулта решение, $(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, тогаш има бескрајно многу решенија, бидејќи за секоја реална вредност на параметарот t , $(tu_1, tu_2, \dots, tu_n)$ е решение на хомогениот систем. Во секој случај лесно се проверува дека множеството решенија на хомогениот систем во векторскиот простор $\mathbb{R}^n$ претставува потпростор. Со примена на Гаусовиот метод може да се најде овој потпростор и да се утврди неговата димензија. Дискусијата спроведена за нехомогениот систем пренесена за хомоген систем укажува дека во случајот I множеството решенија се состои само од нултото решение додека во случајот II и III множеството решенија е потпростор со димензија $n - r$.

Пример 5. Примена на Гаусовиот метод за решавање на системот
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

За дадениот систем имаме:
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Нека $z = t$, тогаш $y = \frac{3}{5}t$ и $x = \frac{2}{5}t$. Затоа, општото решение на системот е $\left(\frac{2}{5}t, \frac{3}{5}t, t\right)$, т.е. $\{(2t, 3t, 5t) | t \in \mathbb{R}\}$, кое геометриски претставува права во просторот низ координатниот почеток и со вектор на правецот $(2, 3, 5)$. ♦



Задачи за самостојна работа

Реши ги следните системи линеарни равенки (задача 1-9):

$$1. \begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 4 \\ 3x - 7y + 3z - t = -1 \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7 \\ 4x - 6y + 3z + t = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -x + y + z + t = a \\ x - y + z + t = b \\ x + y - z + t = c \\ x + y + z - t = d \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 4 \\ 9x + 4y + z + 7t = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + y + z + t + u = 15 \\ x + 2y + 3z + 4t + 5u = 35 \\ x + 3y + 6z + 10t + 15u = 70 \\ x + 4y + 10z + 20t + 35u = 126 \\ x + 5y + 15z + 35t + 70u = 210 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 2z + 5t = 3 \\ 9x + y + 4z - 5t = 1 \\ 2x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 7x + y + 6z - t = 7 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$$

Решете ги следните системи хомогени линеарни равенки (задача 10-12):

$$10. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

5.3. Матрици. Транспонирани матрици

Дефиниција 1. Правоаголна шема од облик $A =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

каде што $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, се нарекува **матрица** и се означува со $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Хоризонталните n -торки

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \quad (m \text{ на број})$$

се нарекуваат **редици** на матрицата $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, а вертикалните m -торки

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \quad (n \text{ на број})$$

се нарекуваат **колони** на матрицата. Реалните броеви a_{ij} , $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, се нарекуваат **елементи** на матрицата. Елементот a_{ij} кој што се наоѓа во пресекот на i -тата редица и j -тата колона се нарекува (i,j) -ти елемент. Матрицата со m редици и n колони се нарекува $m \times n$ матрица или матрица од тип $m \times n$.

За $m \times n$ матриците $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ и $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ велиме дека се **еднакви**, ако $a_{ij}=b_{ij}$, за $i=1,2,\dots,m$ и $j=1,2,\dots,n$. Значи, секое матрично равенство означува mn скаларни равенства.

Пример 1. Матриците $\begin{bmatrix} x+y & 2z+t \\ x-y & z-t \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ се еднакви ако и само ако $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+t=5 \\ z-t=4 \end{cases}$

т.е. за вредностите $x=2$, $y=1$, $z=3$, $t=-1$. ♦

Матрица со една редица ($m=1$) се нарекува **вектор-редица**, додека матрица со една колона ($n=1$) се вика **вектор-колона**. Секој реален број може да се смета за 1×1 матрица, $a=[a]$.

Нека A е $m \times n$ матрица. **Транспонирана матрица** A^t на A е $n \times m$ матрица во којашто редиците на A претставуваат колони на A^t , а колоните на A претставуваат редици на A^t , соодветно. Со други зборови ако $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ и $A^t=[a_{ij}^t]$, тогаш $a_{ij}^t=a_{ji}$. Имено,

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Пример 2. Транспонирана на 3×2 матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, е 2×3 матрица

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Теорема 1. За секоја матрица A важи $(A^t)^t = A$.

Доказ. Ако A е $m \times n$ матрица, тогаш A^t е $n \times m$ матрица. Според тоа $(A^t)^t$ е $m \times n$ матрица каква што е и матрицата A . Освен тоа, за (i,j) -тиот елемент на матриците A и $(A^t)^t$ важи $(a_{ij}^t)^t = a_{ji}^t = a_{ij}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Според тоа важи матричното равенство $(A^t)^t = A$. ■



Задачи за самостојна работа

1. Нацртај три кружници k_1, k_2 и k_3 и четири точки A_1, A_2, A_3 и A_4 . Потоа формирај 4×3 матрица $B = [b_{ij}]$ каде b_{ij} прима вредност 1 ако точката A_i се наоѓа во внатрешноста на кружницата k_j , прима вредност 0 ако точката A_i лежи на кружницата k_j , прима вредност -1 ако точката A_i се наоѓа надвор од кружницата k_j .

2. Врз основа на цртежот од претходната задача, формирај 3×4 матрица $C = [c_{ij}]$, каде c_{ij} прима вредност 1 ако кружницата k_i ја содржи во себе точката A_j , прима вредност 0 ако кружницата k_i минува низ точката A_j , прима вредност -1 ако кружницата k_i не ја содржи во себе точката A_j . Какви се матриците B и C ?

3. Најди ја матрицата A^t , ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. За кои вредности на параметрите x, y и z важи равенството $A = A^t$, ако $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2y & 1+z & x \\ 1+x & y-1 & y \end{bmatrix}$?

5. Дали постојат реални броеви x и y така што $A = A^t$, ако $A = \begin{bmatrix} xy & x^2 \\ -1-y^2 & -xy \end{bmatrix}$?

5.4. Собирање на матрици. Множење на матрица со број

Дефиниција 1. Нека $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ се $m \times n$ матрици. Збир $A + B$ на матриците A и B е $m \times n$ матрица $C = [c_{ij}]$ со елементи $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$; се пишува $C = A + B$.

Со други зборови, матрицата C е од тип како и матриците A и B , а нејзините елементи се зборови на соодветните елементи на матриците A и B . Да забележиме дека операцијата собирање на матрици е дефинирана само за еднотипни матрици.

Пример 1. За збирот на матриците $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ од дефиницијата

$$\text{имаме } A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3-2 & 4-3 \\ 5+0 & 2-1 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 2. Нека $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и k е реален број. Производ на реалниот број k со матрицата A е матрицата $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ со елементи $b_{ij} = ka_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$; се пишува $B = kA$.

Со други зборови, матрица се множи со реален број така што секој нејзин елемент се множи со реалниот број.

Се договараеме матрицата $(-1)A$ да ја означуваме со $-A$, т.е. $(-1)A = -A$. Значи, ако $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, тогаш $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$.

Пример 2. Нека $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Тогаш $2A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ и $-3A = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, бидејќи

$$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix},$$

$$-3A = (-3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 1 & (-3) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 3 & (-3) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Нека A и B се $m \times n$ матрици. Операција **одземање матрици** се дефинира со разенството $A - B = A + (-B)$. Со други зборови, ако $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ тогаш **разлика** $A - B$ на матрицата A со матрицата B е матрицата $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ чии елементи се $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Да забележиме дека операцијата одземање матрици е дефинирана само за еднотипни матрици.

Пример 3. Ако $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, тогаш

$$2A - 3B = 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix}.$$

Нулта матрица, се нарекува $m \times n$ матрица со елементи сите еднакви на 0. Вообичаено таа се означува со O . Значи, $O = [0]_{m \times n}$.

Во следната теорема се содржани некои својства на дефинираните операции со матрици.

Теорема 1. Нека A, B, C и O се $m \times n$ матрици и нека $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Тогаш важи:

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $A + O = O + A = A$

(iii) $A + (-A) = (-A) + A = O$

(iv) $A + B = B + A$

(v) $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$

(vi) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

(vii) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

(viii) $1A = A$ и $0A = O$.

Доказ. Нека $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $C=[c_{ij}]$ и $O=[0]$. Заради својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за (i, j) – тиот елемент важат равенствата:

$$\begin{aligned} a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}, & a_{ij} + 0 &= 0 + a_{ij} = a_{ij}, \\ a_{ij} + (-a_{ij}) &= (-a_{ij}) + a_{ij} = 0, & a_{ij} + b_{ij} &= b_{ij} + a_{ij}, \\ k_1(a_{ij} + b_{ij}) &= k_1 a_{ij} + k_1 b_{ij}, & (k_1 + k_2)a_{ij} &= k_1 a_{ij} + k_2 a_{ij}, \\ k_1(k_2 a_{ij}) &= (k_1 k_2) a_{ij}, & 1a_{ij} &= a_{ij} \text{ и } 0a_{ij} = 0, \end{aligned}$$

за $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Согласно со дефиницијата за еднакви матрици следува дека се точни и соодветните матрични равенства искажани во теоремата. ■

Теорема 2. Нека A и B се $m \times n$ матрици и нека $k \in \mathbb{R}$. Тогаш важи:

$$(i) (A+B)^t = A^t + B^t \quad (ii) (kA)^t = kA^t.$$

Доказ. Нека $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$. Во доказот ќе користиме дека $a_{ij} = a_{ji}$ што следува од дефиницијата за транспонирана матрица. Да забележиме дека левата и десната страна се матрици со ист ред. За (i, j) – тиот елемент важи:

$$(i) (a_{ij} + b_{ij})^t = a_{ji} + b_{ji} = a_{ij}^t + b_{ij}^t, \quad (ii) (ka_{ij})^t = ka_{ji} = ka_{ij}^t,$$

за $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Согласно со дефиницијата за еднакви матрици следува дека се точни и соодветните матрични равенства искажани во теоремата. ■

Од теорема 1 непосредно заклучуваме дека множеството на сите $m \times n$ матрици е векторски простор во однос на операциите собирање на матрици и множење на матрица со скалар, кој вообичаено се означува со $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ќе покажеме дека димензијата на овој векторски простор е mn , т.е. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Дефинираме матрица E_{ij} чијшто елемент во i -та редица и j -та колона е еднаков на 1, додека сите други елементи се еднакви на 0, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Тогаш секоја матрица $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ може да се претстави во облик $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$, што значи дека множеството $\{E_{ij} | i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n\}$ го генерира просторот од сите $m \times n$ матрици. Освен тоа, ако претпоставиме дека произволна линеарна комбинација $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} E_{ij} = O$ (каде што O е нултата $m \times n$ матрица) тогаш добиваме дека $B=[b_{ij}] = O$ т.е. $b_{ij} = 0$, за секои $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Според тоа, матриците E_{ij} се линеарно независни. Значи множеството $\{E_{ij} | i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n\}$ е база за векторскиот простор од сите $m \times n$ матрици. Имајќи во вид дека ова множество има mn елементи заклучуваме дека векторскиот простор од сите $m \times n$ матрици има димензија mn .

Пример 2. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ може да се претстави како линеарна комбинација на 2×4 матриците E_{ij} , $i=1,2$, $j=1,2,3,4$.

$$A = 1E_{11} + 0E_{12} + (-2)E_{13} + 3E_{14} + 1E_{21} + 2E_{22} + 0E_{23} + 5E_{24} = \\ = 1E_{11} - 2E_{13} + 3E_{14} + 1E_{21} + 2E_{22} + 5E_{24},$$

каде што $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
 $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.



Задачи за самостојна работа

1. Најди ја матрицата $3A - 2B + C$, ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
2. Најди ги коефициентите x , y , z и t , така што да важи
$$x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
3. Докажи, дека матриците $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ формираат база на векторскиот простор $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ на сите 2×2 матрици.
4. Дали матриците $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ формираат база на векторскиот простор $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ на сите 2×2 матрици?

5.5 Множење на матрици

Дефиниција 1. Нека $A = [a_{ij}]$ е $m \times n$ матрица и $B = [b_{ij}]$ е $n \times r$ матрица. Производ AB на матриците A и B е $m \times r$ матрица $C = [c_{ij}]$ со елементи $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ за $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,r$; се пишува $C = AB$.

Да забележиме дека производот AB не е дефиниран ако бројот на колони на првата матрица е различен од бројот на редици на втората матрицата B .

Пример 1. За 2×3 матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и за 3×1 матрицата $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ е дефиниран

производот $C = AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ којшто е 2×1 матрица, но нема смисла производот BA , бидејќи бројот на колони на B , $1 \neq 2$ – бројот на редици на A .

Пример 2. Нека $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Тогаш

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 + 6 \cdot 4 & -2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} \text{ и } BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Притоа, очигледно $AB \neq BA$. ♦

Од последниот пример може да заклучиме дека

✓ множењето на две матрици не е комутативно, дури и кога се дефинирани двата производи;

✓ производот на две ненулти матрици може да биде нулта матрица.

Производот на матрици ги има својствата содржани во следнава теорема:

Теорема 1. За секој реален број k и за матриците A , B и C ако се дефинирани производите содржани од едната страна на условите (i) – (v), тогаш се дефинирани и производите од другата страна и притоа важат равенствата:

- (i) $A(BC) = (AB)C$ (асоцијативен закон);
- (ii) $A(B + C) = AB + AC$ (лев дистрибутивен закон на множење во однос на собирање);
- (iii) $(B + C)A = BA + CA$ (десен дистрибутивен закон на множење во однос на собирање);
- (iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;
- (v) $(AB)^t = B^t A^t$.

Доказ. Согласно со својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за производот на (ii) – место важи:

(i) Ако $A = [a_{ij}]$ е $m \times p$ матрица, $B = [b_{ij}]$ е $p \times q$ матрица, и $C = [c_{ij}]$ е $q \times n$ матрица, тогаш

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} \sum_{r=1}^q b_{kr} c_{rj} = \sum_{r=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kr} c_{rj} = \sum_{r=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kr} \right) c_{rj}.$$

(ii) Ако $A = [a_{ij}]$ е $m \times p$ матрица, а $B = [b_{ij}]$ и $C = [c_{ij}]$ се $p \times n$ матрици, тогаш

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^p (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^p a_{ik} c_{kj}.$$

(iii) Ако $B=[b_{ij}]$ и $C=[c_{ij}]$ се $m \times p$ матрици, а $A=[a_{ij}]$ е $p \times n$ матрица, тогаш

$$\sum_{k=1}^p (b_{ik} + c_{ik}) a_{kj} = \sum_{k=1}^p (b_{ik} a_{kj} + c_{ik} a_{kj}) = \sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj} + \sum_{k=1}^p c_{ik} a_{kj}.$$

(iv) Ако $A=[a_{ij}]$ е $m \times p$ матрица, а $B=[b_{ij}]$ е $p \times n$ матрица, тогаш

$$k \sum_{r=1}^p a_{ir} b_{rj} = \sum_{r=1}^p (ka_{ir}) b_{rj} = \sum_{r=1}^p a_{ir} (kb_{rj}).$$

(v) Нека $A=[a_{ij}]$ е $m \times p$ матрица, а $B=[b_{ij}]$ е $p \times n$ матрица. Тогаш матрицата AB е дефинирана и $(AB)^t$ е $n \times m$ матрица. Освен тоа, B^t е $n \times p$ матрица, A^t е $p \times m$ матрица, така што $B^t A^t$ е дефинирана и тоа е $n \times m$ матрица, каква што е и $(AB)^t$.

Останува да се докаже дека (i, j) -тиот елемент во двете матрици е ист број. Навистина, дека (i, j) -тиот елемент во матрицата $(AB)^t$ е еднаков на (j, i) -тиот елемент во матрицата AB и тој гласи $\sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki}$. Од друга страна, тој е всушност, производот на i -тата редица на матрицата B^t со j -тата колона на матрицата A^t , односно (i, j) -тиот елемент од производот $B^t A^t$.

Согласно со дефиницијата за еднакви матрици следува дека се точни и соодветните матрични равенства искажани во теоремата. ■



Задачи за самостојна работа

1. Нека A е $m \times n$ матрица, а B е $n \times m$ матрица. Најди го типот на матриците AB и BA . Дали може $AB=BA$, ако $m \neq n$?

2. Избери две

а) 2×2 матрици A и B , и провери дали $AB \neq BA$,

б) 3×3 матрици A и B , и провери дали $AB \neq BA$.

Дали може да се избераат 2×2 матрици A и B така што $AB=BA$?

3. Дадени се матриците $A=[1 \ 2 \ 0 \ -1]$ и $B=[-2 \ 1 \ 1 \ 2]^t$. Најди ги производите AB и BA .

4. Пресметај ги производите:

$$a) \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix};$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Нека е дадена матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Најди ја матрицата $A^2 = AA$, а потоа

покажи дека $A^2A = AA^2$. Докажи дека за секоја $n \times n$ матрица A важи $A^2A = AA^2$ и затоа може да се дефинира $A^3 = AA^2 = A^2A$ и поопшто $A^k = \underbrace{AA \cdots A}_k$.

6. Нека A е $n \times n$ матрица. Докажи дека $(AA^t)^t = AA^t$.

7. Докажи, дека $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} \end{bmatrix}$ за $n \geq 2$, каде c_n се Фибоначиевите броеви дефинирани со $c_0 = 1, c_1 = 1, c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.

5.6. Квадратни матрици

Матрица A се вика **квадратна**, ако бројот на редици е еднаков со бројот на колони. Ако бројот на колони, односно редици е n , велиме дека A е квадратна матрица од ред n или n -квадратна матрица. Елементите $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ја сочинуваат главната дијагонала.

1. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ е квадратна матрица од ред 3 со дијагонални елементи 1,

2, 3. ♦

Горнотриаголна матрица е квадратна матрица, чии елементи под главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Дијагонална матрица е квадратна матрица чии елементи надвор од главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Долготриаголна матрица е квадратна матрица, чии елементи над главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Единична матрица е дијагонална матрица чиешто дијагонални елементи се еднакви на 1 и се означува со I :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Вообичаено, дијагоналната матрица со елементи по главната дијагонала $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ја означуваме со $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, додека единичната матрица од ред n ја означуваме со I_n .

Пример 2. $\text{diag}(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ♦

За секоја n – квадратна матрица A е точно дека $AI_n = I_n A = A$.

Матрица од облик kI_n , каде што k е реален број, се нарекува **скаларна матрица**. Тоа е всушност, дијагонална матрица чиешто елементи на дијагоналата се еднакви на k т.е. $kI = \text{diag}(k, k, \dots, k)$.

Квадратната матрица A се нарекува

- ✓ **симетрична**, ако $A^t = A$,
- ✓ **антисиметрична** (или антисиметрична), ако $A^t = -A$,
- ✓ **ортогонална**, ако $AA^t = I$.
- ✓ **нилпотентна**, ако постои m , така што $A^m = O$.

Пример 3. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ е антисиметрична, додека матрицата

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ е симетрична. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ е nilpotent, бидејќи $A^3 = O$. ♦

Пример 4. За произволна квадратна матрица A е точно дека

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t;$$

значи $A + A^t$ е симетрична матрица. Потоа,

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

што значи дека $A - A^t$ е антисиметрична матрица. ♦

Пример 5. Ако A е n -квадратна матрица, тогаш производите

$$A^2 = AA, A^3 = AA^2, \dots, A^m = AA^{m-1}$$

се матрици со ист ред како и матрицата A . Затоа, ако

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

е полином од m -та степен, тогаш може да дефинираме матричен полином со

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_mA^m$$

којшто е добро дефинирана матрица. Во случај кога $f(A)$ е нултата матрица велиме дека A е корен или нула на матричниот полином f . ♦



Задачи за самостојна работа

1. Докажи дека $I_m^n = I_n$, за секој природен број n .

2. Нека A е n -квадратна матрица, а $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е дијагонална матрица. Најди ги матриците AD и DA , а потоа објасни како може да се смета дека се добиени овие две матрици од матрицата A .

3. Ако A е n -квадратна матрица, докажи дека AA^t е симетрична матрица.

4. Ако n -квадратната матрица A е
а) симетрична; б) антисиметрична,

дали е симетрична или антисиметрична матрицата A^m ?

5. Докажи дека матрицата $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ е ортогонална.

6. Докажи, дека множеството од сите ортогонални матрици во однос на матричното множење претставува полугрупа со единица.

7. Докажи дека матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ е нилпотентна.

8. Докажи дека множеството од симетрични n -квадратни матрици е векторски потпростор со димензија $\frac{n(n+1)}{2}$ од векторскиот простор на сите n -квадратни матрици. Наведи една база на тој потпростор.

9. Докажи дека множеството од антисиметрични n -квадратни матрици е векторски потпростор со димензија $\frac{n(n-1)}{2}$ од векторскиот простор на сите n -квадратни матрици. Наведи една база на тој потпростор.

5.7. Поим за пресликување

Нека A и B се дадени непразни множества. Ако по некое правило на секој елемент $a \in A$ му придружаме единствен елемент $b \in B$, велиме дека е зададено **пресликување** f од множеството A во множеството B и пишуваме $f: A \rightarrow B$. Притоа, ако на елементот a од множеството A му соодветствува елементот b од множеството B , велиме дека b е **слика** на a при пресликувањето f и пишуваме $b = f(a)$ или $a \mapsto b$. Множеството A се нарекува **домен** на пресликувањето f , а множеството B **кодомен** на пресликувањето f . Пресликувањата вообичаено ги означуваме со мали латински букви, на пример, $f, g, h, \dots$

За две пресликувања $f: A \rightarrow B$ и $g: C \rightarrow D$ велиме дека се **еднакви** ако $C = A$, $D = B$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$ и пишуваме $f = g$. Со други зборови, две пресликувања се еднакви ако имаат ист домен, ист кодомен и „исто дејство“ т.е. двете слики на секој елемент од A се еднакви.

Нека $f: A \rightarrow B$. Ако $A' \subseteq A$ тогаш множеството

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$$

се вика **слика** на подмножеството A' при пресликувањето f . Да забележиме дека $f(A') \subseteq B$, т.е. сликата на произволно подмножество од доменот е подмножество од кодоменот на пресликувањето.

Ако $B' \subseteq B$ тогаш множеството

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

се вика **инверзна слика** на множеството B' при пресликувањето f . Да забележиме дека $f^{-1}(B') \subseteq A$, односно инверзната слика на произволно подмножество од кодоменот е подмножество од доменот на пресликувањето.

1. Нека $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z, t\}$ и $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = z$ и $f(d) = y$. Тогаш

$$f(\{a, b, d\}) = \{f(a), f(b), f(d)\} = \{x, y\}, \quad f(A) = \{x, y, z\}, \quad f^{-1}(\{y\}) = \{a, d\}, \quad f^{-1}(\{z, t\}) = \{c\}. \spadesuit$$

Нека $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$. Пресликувањето $h: A \rightarrow C$ дефинирано со $h(a) = g(f(a))$, за секое $a \in A$, се вика **композиција** или **состав** на пресликувањата f и g , и се означува со $g \circ f$.

Ако $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ и $h: C \rightarrow D$, тогаш $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Навистина, за произволно $a \in A$ имаме

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) \text{ и } ((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

од каде што следува дека $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$, односно $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Пресликувањето $f: A \rightarrow B$ се нарекува:

✓ **инјекција**, ако за секое $x_1, x_2 \in A$ важи импликацијата:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

✓ **сурјекција**, ако секој елемент $y \in B$ е слика на барем еден елемент $a \in A$.

✓ **биекција**, ако истовремено е инјекција и сурјекција.

Пресликувањето $f: A \rightarrow A$ дефинирано со $f(a) = a$, за секој $a \in A$ се нарекува **идентично пресликување** на множеството A и се означува со 1_A .

Нека $f: A \rightarrow B$ е биекција. Пресликување $g: B \rightarrow A$ дефинирано со

$$g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

се нарекува **инверзно пресликување** на пресликувањето f . Ќе предочиме некои својства на инверзното пресликување:

1^o Ако $a \in A$ е произволно избран, тогаш $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = a = 1_A(a)$, од каде што следува дека $g \circ f = 1_A$. Слично се покажува дека $f \circ g = 1_B$.

2^o Пресликувањето $g: B \rightarrow A$ е единствено. Навистина, ако претпоставиме дека $g_1, g_2: B \rightarrow A$ се инверзни пресликувања на пресликувањето f , тогаш од

$$g_1(b) = g_1(f(a)) = g_1 \circ f(a) = 1_A(a) = g_2 \circ f(a) = g_2(f(a)) = g_2(b), \text{ за секој } b \in B,$$

следува дека $g_1 = g_2$. Инверзното пресликување на пресликувањето f се означува со f^{-1} .

3^o Ако $f: A \rightarrow B$ е биекција, тогаш $(f^{-1})^{-1} = f$. Навистина, ако $a \in A$ е произволно избран и ако $f(a) = b$, тогаш $f^{-1}(b) = a$ од каде што следува дека $(f^{-1})^{-1}(a) = b$. Според тоа $(f^{-1})^{-1}(a) = f(a)$, за секој $a \in A$, односно $(f^{-1})^{-1} = f$.

4^o Ако $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ се биекции, тогаш $g \circ f$ е исто така биекција како состав од биекции. Нека $c \in C$ е произволно избран. Бидејќи g е биекција постои единствен $b \in B$, така што $g^{-1}(c) = b$. Слично, бидејќи f е биекција постои единствен $a \in A$, така што $f^{-1}(b) = a$. Тогаш $f^{-1} \circ g^{-1}(c) = f^{-1}(b) = a$. Од друга страна, од $g \circ f(a) = g(b) = c$ добиваме дека $(g \circ f)^{-1}(c) = a$. Според тоа, $(g \circ f)^{-1}(c) = f^{-1} \circ g^{-1}(c)$, за секој $c \in C$ од каде што следува дека $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.



Задачи за самостојна работа

1. Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е пресликувањето зададено со $f(x) = -3x + 5$. Најди:

- а) $f(4)$; б) $f([0, 2])$; в) $f^{-1}([-1, 3])$.

2. Докажи, дека едно пресликување $f: A \rightarrow B$ е инјекција, ако и само ако за секое $x_1, x_2 \in A$ важи импликацијата: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Докажи дека едно пресликување $f: A \rightarrow B$ е сурјекција, ако и само ако $f(A) = B$.

4. Докажи дека ако $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ се инјекции (сурјекции), тогаш и $g \circ f$ е инјекција (сурјекција).

5. Докажи дека ако $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ се биекции, тогаш и $g \circ f$ е биекција.

5.8. Линеарни пресликувања

Дефиниција 1. Нека V и U се векторски простори. Пресликувањето $F: V \rightarrow U$ се нарекува **линеарно пресликување**, ако се исполнети следниве услови:

$$(\forall v, w \in V) \quad F(v + w) = F(v) + F(w), \quad (1)$$

$$(\forall k \in \mathbb{R}) (\forall v \in V) \quad F(kv) = kF(v). \quad (2)$$

Со други зборови, пресликувањето $F: V \rightarrow U$ е линеарно, ако сликата на збирот од два вектора е еднаква на збирот од сликите на векторите, а сликата на производот на вектор со скалар е еднаква на производот од скаларот со сликата на векторот.

Кога треба да испитаеме дали едно пресликување е линеарно, се покажува практична примената на следнава теорема.

Теорема 1. Нека V и U се векторски простори. Пресликувањето $F: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување, ако и само ако важи:

$$(\forall v, w \in V) (\forall a, b \in \mathbb{R}) \quad F(av + bw) = aF(v) + bF(w). \quad (3)$$

Доказ. Нека $F: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување. Тогаш за произволни вектори $v, w \in V$ и произволни скалари $a, b \in \mathbb{R}$, со последователна примена на (1) и (2) добиваме

$$F(av + bw) = F(av) + F(bw) = aF(v) + bF(w).$$

Обратно, условите (1) и (2) се последица од условот (3) за $k_1 = k_2 = 1$ и $k_2 = 0$, соодветно. ■

Специјално, линеарното пресликување $F: V \rightarrow V$ се нарекува **линеарна трансформација** на векторскиот простор V .

Во продолжение ќе наведеме некои својства на линеарните пресликувања:

1^o Нека $F: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување. Тогаш F го пресликува нултиот вектор на V во нултиот вектор на U , односно $F(0) = 0$. Навистина од $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$, следува дека $F(0) = 0$.

2^o За секој природен број $m \geq 1$, за произволни скалари $a_i \in \mathbb{R}$ и произволни вектори $v_i \in V$, $i = 1, 2, \dots, m$, со примена на (1) и (2) добиваме

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_m F(v_m).$$

Пример 1. Нека $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ е ортогоналната проекција на просторот врз ху рамнина, односно $F(x, y, z) = (x, y, 0)$, за секој $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Тогаш за произволно избрани $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ и $k \in \mathbb{R}$, имаме

$$F(v + w) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = F(v) + F(w),$$

$$F(kv) = F(kx_1, ky_1, kz_1) = (kx_1, ky_1, 0) = k(x_1, y_1, 0) = kF(v),$$

од каде што заклучуваме дека проекцијата F е линеарна трансформација. ♦

Пример 2. Нека $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ е транслација во реалната рамнина дефинирана со $F(x, y) = (x + 1, y + 3)$, за секое $(x, y) \in \mathbb{R}$. Забележуваме дека $F(0, 0) = (2, 3) \neq (0, 0)$, па според тоа транслацијата F не е линеарно пресликување. ♦

Пример 3. Нека $F: V \rightarrow U$ е пресликување така што $F(v) = 0$, за секој $v \in V$. Со непосредна проверка на условот (3) може да заклучиме дека F е линеарно пресликување. Ова пресликување F се нарекува **нулто пресликување** и вообичаено се означува со 0 . Значи, $0(v) = 0$, за секој $v \in V$. ♦

Пример 4. Идентичното пресликување $I: V \rightarrow V$ дефинирано со $I(v) = v$, за секое $v \in V$ е линеарно пресликување, бидејќи $I(av + bw) = av + bw = aI(v) + bI(w)$. ♦

Следната теорема покажува дека секое линеарно пресликување е еднозначно определено со сликите на векторите од дадена база на векторскиот простор.

Теорема 2. Нека U и V се векторски простори. Нека $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ е база на векторскиот простор V и нека $u_1, u_2, \dots, u_n$ се произволно избрани вектори во векторскиот простор U . Тогаш постои единствено линеарно пресликување $F: V \rightarrow U$, такво што

$$F(v_1) = u_1, F(v_2) = u_2, \dots, F(v_n) = u_n.$$

Доказ. Нека v е произволен вектор од векторскиот простор V . Бидејќи $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ е база на V , постојат единствени скалари $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, такви што

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n.$$

Ќе покажеме дека пресликувањето $F: V \rightarrow U$ дефинирано со

$$F(v) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

е линеарно пресликување што ги исполнува условите од теоремата.

За $i = 1, 2, \dots, n$, ако $v = v_i$, тогаш со изборот $a_1 = \dots = a_{i-1} = a_{i+1} = \dots = a_n = 0$ и $a_i = 1$, се добива

$$F(v_i) = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + \dots + 0u_n = u_i.$$

Нека $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ и $w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$ се произволни вектори во V . Тогаш $v + w = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \dots + (a_n + b_n)v_n$, така што

$$\begin{aligned} F(v + w) &= (a_1 + b_1)u_1 + (a_2 + b_2)u_2 + \dots + (a_n + b_n)u_n = \\ &= (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) + (b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n) = F(v) + F(w). \end{aligned}$$

Освен тоа, ако $k \in \mathbb{R}$, тогаш

$$\begin{aligned} F(kv) &= F(k(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)) = F(ka_1 v_1 + ka_2 v_2 + \dots + ka_n v_n) = \\ &= (ka_1)u_1 + (ka_2)u_2 + \dots + (ka_n)u_n = k(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n) = kF(v). \end{aligned}$$

Преостанува да докажеме дека F е единствено линеарно пресликување со тоа својство. Навистина, ако $G: V \rightarrow U$ е друго линеарно пресликување такво што $G(v_i) = u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш за произволен вектор $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, имаме

$$G(v) = G(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 G(v_1) + a_2 G(v_2) + \dots + a_n G(v_n) =$$

$$= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = F(v).$$

Значи $G(v) = F(v)$ за секој $v \in V$, па според тоа $G = F$. ■



Задачи за самостојна работа

1. Провери дали е линеарно пресликувањето $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, дефинирано со
 - а) $f(x, y, z) = (2x + y, -3x + 4z)$;
 - б) $f(x, y, z) = (3x + z + 1, -3x + 2y + 4z)$;
 - в) $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$;
 - г) $f(x, y, z) = (0, 2 - 3x + 4z)$.
2. Нека v е произволно избран вектор во $\mathbb{R}^3$. Дали пресликувањето $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дефинирано со $f(u) = v \times u$, за секој $u \in \mathbb{R}^3$, е линеарно? ($\times$ означува векторски производ).
3. Нека v е произволно избран вектор во $\mathbb{R}^3$. Дали пресликувањето $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирано со $f(u) = v \cdot u$, за секој $u \in \mathbb{R}^3$, е линеарно? ($\cdot$ означува скаларен производ).
4. Покажи дека следните пресликувања не се линеарни:
 - а) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирано со $f(x, y, z) = xyz$, за секој $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
 - б) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинирано со $f(x, y, z) = (x, |x|)$, за секој $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
 - в) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дефинирано со $f(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$, за секој $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
5. Нека V е векторскиот простор на сите $n \times n$ матрици и нека M е произволна $n \times n$ матрица. Покажи дека пресликувањето $f: V \rightarrow V$ дефинирано со $f(A) = AM + MA$, за секоја $A \in V$ е линеарна трансформација.
6. Најди ја сликата $f(x, y, z)$, ако $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ е зададено со $f(1, 1, 0) = (2, 1)$, $f(0, 1, 1) = (0, -1)$ и $f(1, 0, 1) = (1, 1)$.

5.9. Биективни линеарни пресликувања (изоморфизми)

Дефиниција 1. Нека V и U се векторски простори. Линеарно пресликување $F: V \rightarrow U$ кое е биекција се нарекува **изоморфизам**.

Да уочиме некои својства на изоморфизмите.

1° Нека $F: V \rightarrow U$ е изоморфизам. Тогаш инверзното пресликување $F^{-1}: U \rightarrow V$ е исто така изоморфизам.

Навистина, за произволни $u, u' \in U$, постојат $v, v' \in V$, така што $F(v) = u$ и $F(v') = u'$. Бидејќи F е линеарно пресликување, за произволни скалари $a, b \in \mathbb{R}$ имаме:

$$F(av + bv') = aF(v) + bF(v') = au + bu'$$

од каде што следува дека

$$F^{-1}(au + bu') = av + bv' = aF^{-1}(u) + bF^{-1}(u').$$

Според тоа $F^{-1}: U \rightarrow V$ е исто така линеарно пресликување. Бидејќи F^{-1} е биекција, следува дека F^{-1} е изоморфизам.

2^o Ако $F: V \rightarrow U$ и $G: U \rightarrow W$ се изоморфизми, тогаш $G \circ F$ е исто така изоморфизам и притоа важи $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Навистина, за произволни $v, w \in V$ и $k \in \mathbb{R}$ имаме

$$(G \circ F)(v + w) = G(F(v + w)) = G(F(v) + F(w)) = G(F(v)) + G(F(w)) = G \circ F(v) + G \circ F(w) \text{ и}$$

$$(G \circ F)(kv) = G(F(kv)) = G(kF(v)) = kG(F(v)) = k(G \circ F)(v)$$

од каде што следува дека $G \circ F$ е линеарно пресликување. Освен тоа $G \circ F$ е биективно пресликување како состав од биективни пресликувања и при тоа важи $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Пример 1. Нека V е векторски простор. Идентичното пресликување $I: V \rightarrow V$ е изоморфизам. ♦

Поимот за изоморфизам е често користен во математиката, не само за линеарни пресликувања туку и во други случаи кога имаме биективни пресликувања.

Дефиниција 2. Два векторски простора V и U се нарекуваат **изоморфни**, ако постои изоморфизам $F: V \rightarrow U$.

Нека $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е база на n -димензионален векторски простор V . За секој вектор $v \in V$ постојат единствени скалари $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ така што

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Тогаш координатниот вектор $[v]_e = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ е еднозначно одреден за векторот v . Придружувањето $v \rightarrow [v]_e$ дефинира биективно пресликување $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ бидејќи секој вектор од V има слика, различни вектори од V имаат различни слики во $\mathbb{R}^n$ и секој вектор во $\mathbb{R}^n$ е слика на некој вектор во V .

Нека $v, w \in V$ и нека $k \in \mathbb{R}$ се произволно избрани. Ако

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \text{ и } w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n, \text{ тогаш од}$$

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F((a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + \dots + (a_n + b_n)e_n) = \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = F(v) + F(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(kv) &= F((ka_1)e_1 + (ka_2)e_2 + \dots + (ka_n)e_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) = \\ &= k(a_1, a_2, \dots, a_n) = kF(v) \end{aligned}$$

следува дека F е линеарно пресликување. Според тоа F е изоморфизам. Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. Секој n -димензионален векторски простор V е изоморфен со векторскиот простор $\mathbb{R}^n$.

Какви и да се елементите на еден векторски простор, нивните индивидуални својства не играат улога кога се изучуваат нивните својства сврзани со операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар. Тие својства кај изоморфните простори се исти, па според тоа изоморфните простори од алгебарска гледна точка не ги разликуваме.

Како последица од теоремата, за да ги проучиме својствата на кој било n -димензионален векторски простор доволно е да го проучиме векторскиот простор $\mathbb{R}^n$.

Векторскиот простор од $m \times n$ матрици е изоморфен со $\mathbb{R}^{mn}$, што значи дека матриците може да се третираат како координатни вектори во $\mathbb{R}^{mn}$ (подредени mn -торки реални броеви) и обратно.

Специјално, векторскиот простор од $n \times 1$ матрици (вектор колони) е изоморфен со $\mathbb{R}^n$, што значи дека вектор-колониците може да се третираат како координатни вектори во $\mathbb{R}^n$ (подредени n -торки реални броеви) и обратно.

Пример 2. Матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ се линеарно зависни, бидејќи координатните вектори $[A] = (1, 2, -3, 4, 0, 1)$, $[B] = (1, 3, -4, 6, 5, 4)$ и $[C] = (3, 8, -11, 16, 10, 9)$ се линеарно зависни, имено $1 \cdot [A] + 2 \cdot [B] + (-1) \cdot [C] = [O]$. Притоа, $1 \cdot A + 2 \cdot B + (-1) \cdot C = O$. ♦



Задачи за самостојна работа

1. Дали линеарната трансформацијата $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинирана со $f(x, y) = (x + y, y)$ е изоморфизам? Во случај на потврден одговор, најди ја линеарната трансформација f^{-1} .

2. Докажи дека пресликувањето $f: P_n(t) \rightarrow P_n(t)$ дефинирано со

$$f(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_n + a_{n-1} t + a_{n-2} t^2 + \dots + a_0 t^n$$

е изоморфизам.

3. Нека a, b, c и d се дадени реални броеви. Покажи дека пресликувањето $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинирано $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ е линеарно. Кој услов треба да го задоволуваат реалните броеви a, b, c и d за да биде изоморфизам даденото линеарно пресликување?

4. Нека V е векторскиот простор на 2×2 матрици. Најди ги координатите на матрицата $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ во однос на базата

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Дали матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ се линеарно зависни?

5.10. Јадро и слика на линеарно пресликување

Нека $F: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување. Множеството од слики на векторите од V се нарекува **слика** на просторот V со пресликувањето F и се означува со $\text{Im } F$, т.е.

$$\text{Im } F = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

Множество од сите вектори во V кои се пресликуваат во нултиот вектор $0 \in U$, се нарекува **јадро (кернел)** на пресликувањето F и се означува со $\ker F$, односно

$$\ker F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}.$$

Теорема 1. Нека $F: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување. Тогаш множеството $\text{Im } F$ е потпростор од U , а множеството $\ker F$ е потпростор од V .

Доказ. Од $F(0) = 0$ следува дека $0 \in \text{Im } F$. Нека $u, u' \in \text{Im } F$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Постојат вектори $v, v' \in V$ така што $F(v) = u$ и $F(v') = u'$. Тогаш

$$au + bu' = aF(v) + bF(v') = F(av + bv') \in \text{Im } F,$$

од каде што следува дека $\text{Im } F$ е потпростор од U .

Бидејќи $F(0) = 0$, $0 \in \ker F$. Нека $v, w \in \ker F$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Тогаш $F(v) = F(w) = 0$, па затоа

$$F(av + bw) = aF(v) + bF(w) = a0 + b0 = 0,$$

од каде што следува $av + bw \in \ker F$. Значи, $\ker F$ е потпростор од V . ■

Пример 1. Нека $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ е ортогоналната проекција врз xy рамнината, т.е. $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Тогаш $\text{Im } F = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ всушност, е xy рамнината, додека $\ker F = \{(x, y, z) \mid (x, y, 0) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ е z -оската. ♦

Нека векторите $v_1, \dots, v_n$ го генерираат просторот V и нека $F: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување. Тогаш векторите $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$ го генерираат потпросторот $\text{Im } F$. Навистина, ако $u \in \text{Im } F$, тогаш $F(v) = u$ за некој вектор $v \in V$. Бидејќи векторите $v_1, v_2, \dots, v_n$ го генерираат просторот V , постојат скалари $a_1, a_2, \dots, a_n$ такви што $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$. Тогаш

$$u = F(v) = F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_n F(v_n),$$

од каде што следува дека векторите $F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$ го генерираат потпросторот $\text{Im } F$.

Ако V е конечнодимензионален векторски простор, важи следнава теорема:

Теорема 2. Нека V е конечнодимензионален векторски простор и нека $F: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување. Тогаш $\dim V = \dim(\ker F) + \dim(\text{Im } F)$.

Доказ*. Нека $\dim V = n$, $W = \ker F$ и $\text{Im } F = U'$. Бидејќи $W \subseteq V$ $\dim W = r \leq n$, и треба да се докаже дека $\dim U' = n - r$.

Нека $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ е база на W . Оваа база ја прошируваме до база на V : $\{w_1, w_2, \dots, w_r, v_1, v_2, \dots, v_{n-r}\}$. Нека $B = \{F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_{n-r})\}$. За да ја докажеме теоремата треба да покажеме дека B е база на потпросторот $U' = \text{Im } F$.

Нека $u \in U'$. Тогаш постои $v \in V$, така што $F(v) = u$. Векторот v може на единствен начин да го запишеме како линеарна комбинација на базните вектори,

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_r w_r + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_{n-r} v_{n-r},$$

каде $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Бидејќи $F(w_i) = 0$ добиваме дека

$$\begin{aligned} u = F(v) &= F(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_r w_r + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_{n-r} v_{n-r}) = \\ &= a_1 F(w_1) + a_2 F(w_2) + \dots + a_r F(w_r) + b_1 F(v_1) + b_2 F(v_2) + \dots + b_{n-r} F(v_{n-r}) = \\ &= b_1 F(v_1) + b_2 F(v_2) + \dots + b_{n-r} F(v_{n-r}), \end{aligned}$$

значи множеството B го генерира потпросторот U' .

Останува да покажеме дека B е линеарно независно множество. Претпоставуваме дека $a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_{n-r} F(v_{n-r}) = 0$. Оттука следува дека

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-r} v_{n-r}) = 0,$$

па $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} \in \ker F = W$. Тогаш постојат скалари $b_1, b_2, \dots, b_r$, така што

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_r w_r, \text{ т.е.}$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} - b_1 w_1 - b_2 w_2 - \dots - b_r w_r = 0.$$

Бидејќи $\{w_1, w_2, \dots, w_r, v_1, v_2, \dots, v_{n-r}\}$ е база за V , добиваме дека $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-r} = 0$ и $b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$. Според тоа B е линеарно независно множество вектори. ■

За едно линеарно пресликување $F: V \rightarrow U$ велиме дека е **сингуларно**, ако постои ненулта вектор во V кој се пресликува во нултиот вектор на U . Во спротивен случај, ако не постои ненулта вектор во V кој се пресликува во нултиот вектор во U , велиме дека пресликувањето F е **несингуларно**. Значи F е несингуларно ако и само ако $\ker F = \{0\}$.

Пример 2. Нека $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ е пресликување дефинирано со $F(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$, за секој $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Тогаш од $F(x, y, z) = 0$ следува дека $x + y = 0$, $x - y = 0$ и $z = 0$, т.е. $x = y = z = 0$. Значи F е несингуларно пресликување. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Што може да се каже за јадрото на едно линеарно пресликување $F: V \rightarrow U$, ако $\dim V = \dim \text{Im } F$?
2. Што може да се каже за множеството слики на едно линеарно пресликување $F: V \rightarrow U$, ако $\dim V = \dim \ker F$?
3. Најди по една база на множеството слики и на јадрото, на линеарните пресликувања:

- а) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - 2y, x - 2y)$;
 б) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 2y, x - 3y, x + y - z)$;
 в) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y, x + 2y + 3z, 2x - 2y)$;
 г) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$.

4. Најди линеарно пресликување $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, за коешто $\text{Im} F$ е генерирано со векторите $(1, 0, -2, 1)$ и $(2, 1, 1, -1)$.

5. Најди го јадрото и множеството слики на **хомотетијата** $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ со центар во координатниот почеток, дефинирана со $f(x, y, z) = (kx, ky, kz)$, за $k \neq 0$.

6. Докажи, дека линеарно пресликување $F: V \rightarrow U$ е инјективно ако и само ако е несингуларно.

7. Нека $f: V \rightarrow U$ и $g: U \rightarrow W$ се несингуларни линеарни пресликувања. Докажи дека $g \circ f: V \rightarrow W$ е исто така несингуларно пресликување.

5.11. Операции со линеарни пресликувања

Нека $F: V \rightarrow U$ и $G: V \rightarrow U$ се линеарни пресликувања. Дефинираме пресликување збир $F + G$ од V во U со равенството

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v), \text{ за секој вектор } v \in V.$$

Исто така, за произволен скалар $k \in \mathbb{R}$ дефинираме пресликување множење со скалар на F , $kF: V \rightarrow U$ со равенството

$$(kF)(v) = kF(v), \text{ за секој вектор } v \in V.$$

Ќе покажеме дека $F + G$ и kF се линеарни пресликувања, ако F и G се линеарни пресликувања. За $v, w \in V$ и $a, b \in \mathbb{R}$ имаме

$$\begin{aligned} (F + G)(av + bw) &= F(av + bw) + G(av + bw) = aF(v) + bF(w) + aG(v) + bG(w) = \\ &= a(F(v) + G(v)) + b(F(w) + G(w)) = a(F + G)(v) + b(F + G)(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (kF)(av + bw) &= kF(av + bw) = k(aF(v) + bF(w)) = \\ &= akF(v) + bkF(w) = a(kF)(v) + b(kF)(w). \end{aligned}$$

Значи $F + G$ и kF се линеарни пресликувања.

Теорема 1. Нека V и U се векторски простори. Множеството од сите линеарни пресликувања од V во U со операциите собирање и множење со скалар е векторски простор.

Доказ. C_1 : Ако $F, G, H: V \rightarrow U$ се линеарни пресликувања, тогаш

$$\begin{aligned} ((F + G) + H)(v) &= (F + G)(v) + H(v) = (F(v) + G(v)) + H(v) = \\ &= F(v) + (G(v) + H(v)) = F(v) + (G + H)(v) = \end{aligned}$$

$$= (F + (G + H))(v), \text{ за секој вектор } v \in V,$$

од каде што следува дека $(F + G) + H = F + (G + H)$.

C_2 : Да го означиме со $O : V \rightarrow U$ нултото пресликување. Тогаш

$$(F + O)(v) = F(v) + O(v) = F(v), \quad \text{за секој вектор } v \in V,$$

т.е. $F + O = F$.

C_3 : За дадено линеарно пресликување $F : V \rightarrow U$ дефинираме пресликување

$G : V \rightarrow U$ со $G(v) = -F(v)$. Тогаш G е линеарно пресликување и освен тоа важи

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v) = F(v) + (-F(v)) = O(v), \quad \text{за секој вектор } v \in V,$$

од каде што следува дека $F + G = O$.

C_4 : За линеарните пресликувања важи

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v) = G(v) + F(v) = (G + F)(v), \quad \text{за секој вектор } v \in V,$$

од каде што следува дека $F + G = G + F$.

M_1 : Ако $F, G : V \rightarrow U$ се линеарни пресликувања и $k \in \mathbb{R}$, имаме

$$\begin{aligned} (k(F + G))(v) &= k(F + G)(v) = k(F(v) + G(v)) = \\ &= k(F(v)) + k(G(v)) = (kF)(v) + (kG)(v) = (kF + kG)(v), \quad \text{за секој вектор } v \in V, \end{aligned}$$

па според тоа $k(F + G) = kF + kG$.

M_2 : Ако $a, b \in \mathbb{R}$ и $F : V \rightarrow U$ е линеарно пресликување, тогаш

$$\begin{aligned} ((a + b)F)(v) &= (a + b)F(v) = a(F(v)) + b(F(v)) = \\ &= (aF)(v) + (bF)(v) = (aF + bF)(v), \quad \text{за секој вектор } v \in V, \end{aligned}$$

од каде што следува дека $(a + b)F = aF + bF$.

M_3 : Ако $a, b \in \mathbb{R}$ и $F : V \rightarrow U$ е линеарно пресликување, тогаш

$$((ab)F)(v) = (ab)(F(v)) = a(bF(v)) = a((bF)(v)) = (a(bF))(v), \quad \text{за секој вектор } v \in V,$$

па според тоа $(ab)F = a(bF)$.

M_4 : Ако $F : V \rightarrow U$ е линеарно пресликување, тогаш

$$(IF)(v) = IF(v) = F(v), \quad \text{за секој вектор } v \in V,$$

од каде што следува дека $IF = F$. ■

Векторскиот простор од сите линеарни пресликувања $F : V \rightarrow U$ ќе го означуваме со $L(V, U)$. Ако V и U имаат конечни димензии, тогаш важи следнава теорема

Теорема 2. Нека U и V се векторски простори. Ако $\dim V = m$ и $\dim U = n$, тогаш $\dim L(V, U) = mn$.

Доказ. Нека $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ е база на векторскиот простор V и $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ е база на векторскиот простор U . Едно линеарно пресликување во $L(V, U)$ е еднозначно определено со сликите на базните вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ во U . Дефинираме пресликувања

$$F_{ij} \in L(V, U), (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$$

со равенствата $F_{ij}(v_i) = u_j$ и $F_{ij}(v_k) = 0$ за $k \neq i$. Множеството $\{F_{ij}\}$ се состои од mn елементи.

Ќе покажеме дека множествот $\{F_{ij}\}$ е база на векторскиот простор $L(V, U)$. Првин ќе докажеме дека множеството $\{F_{ij}\}$ го генерира просторот $L(V, U)$. Нека $F \in L(V, U)$, и нека $F(v_1) = w_1, F(v_2) = w_2, \dots, F(v_m) = w_m$. За $k=1, 2, \dots, m$, бидејќи $w_k \in U$, тој е линеарна комбинација од базните вектори $u_1, u_2, \dots, u_n$, т.е. постојат еднозначно определени скалари $a_{kj}, j=1, 2, \dots, n$ такви што $w_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kn}u_n, (k=1, 2, \dots, m)$.

За да покажеме дека $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij}$, доволно е да се провери дали двете страни од равенството на ист начин ги пресликуваат векторите $v_1, v_2, \dots, v_m$. Бидејќи, за $k=1, 2, \dots, m$

$$\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij} \right) (v_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj}u_j = w_k = F(v_k),$$

заклучуваме дека $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij}$. Од произволноста на F од $L(V, U)$ следува дека множеството вектори $\{F_{ij}\}$ го генерира просторот $L(V, U)$.

За да ја докажеме теоремата преостанува да покажеме уште дека множеството $\{F_{ij}\}$ е линеарно независно. За таа цел претпоставуваме дека $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij} = 0$. Тогаш, за $k=1, 2, \dots, m$ се добива

$$0(v_k) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij} \right) (v_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj}u_j.$$

Имајќи во вид дека $0(v_k) = 0$, за секој $k=1, 2, \dots, m$, добиваме $\sum_{j=1}^n a_{kj}u_j = 0$. Бидејќи $u_1, u_2, \dots, u_n$ се базни вектори, следува дека $a_{kj} = 0$ за $j=1, 2, \dots, n$ и $k=1, 2, \dots, m$. Според тоа, множеството $\{F_{ij}\}$ е линеарно независно. ■

Теорема 3. Нека V, U, W се векторски простори и нека $F, F': V \rightarrow U$ и $G, G': U \rightarrow W$ се линеарни пресликувања. Тогаш точни се следниве тврдења:

- (i) $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$;
- (ii) $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$;
- (iii) $k(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF)$, за произволно $k \in \mathbb{R}$.

Доказ. (i) Тврдењето е точно бидејќи

$$\begin{aligned}(G \circ (F + F'))(v) &= G((F + F')(v)) = G(F(v) + F'(v)) = G(F(v)) + G(F'(v)) = \\ &= (G \circ F)(v) + (G \circ F')(v) = (G \circ F + G \circ F')(v), \text{ за секој вектор } v \in V.\end{aligned}$$

(ii) За секој вектор $v \in V$,

$$\begin{aligned}((G + G') \circ F)(v) &= (G + G')(F(v)) = G(F(v)) + G'(F(v)) = \\ &= (G \circ F)(v) + (G' \circ F)(v) = (G \circ F + G' \circ F)(v),\end{aligned}$$

па според тоа важи (ii).

(iii) За секој вектор $v \in V$,

$$(k(G \circ F))(v) = k((G \circ F)(v)) = k(G(F(v))) = (kG)(F(v)) = ((kG) \circ F)(v),$$

па според тоа важи $k(G \circ F) = (kG) \circ F$. Понатаму, од

$$(k(G \circ F))(v) = k(G(F(v))) = G(kF(v)) = (G \circ (kF))(v), \text{ за секој вектор } v \in V,$$

следува дека $k(G \circ F) = G \circ (kF)$. ■



Задачи за самостојна работа

1. Покажи дека ако $f_1, f_2, \dots, f_n \in L(V, U)$ и $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ се произволно избрани, тогаш $(a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)(u) = a_1 f_1(u) + a_2 f_2(u) + \dots + a_n f_n(u)$.

2. Нека $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ се линеарните пресликувања дефинирани со $f(x, y, z) = (2x, y + z)$ и $f(x, y, z) = (y, x)$. Најди го составот $g \circ f$. Дали постои составот $f \circ g$?

3. Објасни како дејствува линеарното пресликување $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дефинирано со $f(x, y) = (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)$, на векторите во рамнината чијшто почеток е во координатниот почеток?

4. Опиши ги сите линеарни пресликувања $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

5. Докажи дека за произволен векторски простор V , множеството од сите изоморфизми на V во однос на операцијата композиција на пресликувања претставува група.

5.12. Матрична репрезентација на линеарни пресликувања

Нека $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е база на векторскиот простор V и нека $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$. Сега координатното претставување на векторот v во однос на базата $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ го запишуваме како

вектор-колона $[v]_e = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Видовме дека пресликувањето $v \rightarrow [v]_e$ дефинира биективно линеарно пресликување меѓу V и $\mathbb{R}^n$, определено со базата $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и притоа важат равенствата

$$[u + v]_e = [u]_e + [v]_e \text{ и } [kv]_e = k[v]_e.$$

Нека V и U се векторски простори со димензии $\dim V = m$ и $\dim U = n$, и нека $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ е база на векторскиот простор V , а $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ е база на векторскиот простор U . Претпоставуваме дека $f: V \rightarrow U$ е линеарно пресликување. Тогаш векторите $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m)$ припаѓаат на просторот U , па според тоа тие се линеарна комбинација на векторите $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, односно

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + a_{12}e'_2 + \dots + a_{1n}e'_n \\ f(e_2) &= a_{21}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{2n}e'_n \\ &\vdots \\ f(e_m) &= a_{m1}e'_1 + a_{m2}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_n \end{aligned} \quad (1)$$

Транспонираната од претходната матрица со елементи a_{ij} се нарекува **матрична репрезентација** на линеарното пресликување f во однос на базите $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ и $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, и се означува со

$$[f]_{e',e} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Притоа, важи следнава теорема.

Теорема 1. За произволен вектор $v \in V$, важи $[f]_{e',e}[v]_e = [f(v)]_{e'}$.

Доказ. Нека $[v]_e = (v_1, v_2, \dots, v_m)$. Тогаш од (1) добиваме

$$\begin{aligned} [f(v)]_{e'} &= [f(v_1e_1 + \dots + v_me_m)]_{e'} = [v_1f(e_1) + \dots + v_mf(e_m)]_{e'} = v_1[f(e_1)]_{e'} + \dots + v_m[f(e_m)]_{e'} = \\ &= v_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} + \dots + v_m \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m \\ a_{12}v_1 + \dots + a_{m2}v_m \\ \vdots \\ a_{1n}v_1 + \dots + a_{mn}v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = [f]_{e',e}[v]_e. \blacksquare \end{aligned}$$

Теоремата покажува, дека множејќи ја матрицата $[f]_{e',e}$ со вектор-колоната $[v]_e$ во однос на базата $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, всушност, ја добиваме вектор-колоната на сликата $f(v)$ во однос на базата $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$.

Пример 1. Нека $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ е линеарно пресликување зададено со формулата

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + 2x_3, x_1 - 3x_3, x_2), \text{ за секој } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Претпоставуваме дека пресликувањето f е зададено во однос на стандардните бази во $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$. Матрицата на даденото линеарно пресликување е

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ така што } f \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 - v_3 \\ v_2 + 2v_3 \\ v_1 - 3v_3 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{т.е. } f(v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) = (v_1 + v_2 - v_3) e'_1 + (v_2 + 2v_3) e'_2 + (v_1 - 3v_3) e'_3 + v_2 e'_4. \blacklozenge$$

Теорема 2. Пресликување $f \mapsto [f]$, кое на линеарно пресликување f му ја става во соодветство матричната репрезентација $[f]$ ги има следниве својства:

- (i) $[kf]_{e',e} = k[f]_{e',e}$
- (ii) ако $f, g: V \rightarrow U$ се линеарни пресликувања, тогаш $[f+g]_{e',e} = [f]_{e',e} + [g]_{e',e}$.

Доказ. Бидејќи левите и десните страни се матрици со иста димензија, доволно е да се докаже дека за секоја вектор-колона $[v]_e \in V$, важи

$$([kf]_{e',e})[v]_e = (k[f]_{e',e})[v]_e$$

и

$$([f+g]_{e',e})[v]_e = ([f]_{e',e} + [g]_{e',e})[v]_e.$$

Користејќи ја претходната теорема, добиваме

$$([kf]_{e',e})[v]_e = [(kf)(v)]_{e'} = [k(f(v))]_{e'} = k[f(v)]_{e'} = k([f]_{e',e})[v]_e = (k[f]_{e',e})[v]_e$$

и

$$\begin{aligned} ([f+g]_{e',e})[v]_e &= [(f+g)(v)]_{e'} = [f(v) + g(v)]_{e'} = [f(v)]_{e'} + [g(v)]_{e'} = \\ &= [f]_{e',e}[v]_e + [g]_{e',e}[v]_e = ([f]_{e',e} + [g]_{e',e})[v]_e. \blacksquare \end{aligned}$$

Забележуваме дека пресликувањето $f \mapsto [f]$ е биективно. Врз основа на теорема 2 линеарните пресликувања можеме да ги сметаме како матрични пресликувања, т.е. наместо со линеарни пресликувања можеме да работиме само со матрици при избрани бази на векторските простори. Се потсетуваме дека за матриците беше воведена операцијата множење на матрици, а за линеарните пресликувања е дефинирана операцијата композиција од пресликувања. Врската помеѓу овие две операции ни ја дава следнава теорема:

Теорема 3. Нека $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ и $\{e_1'', e_2'', \dots, e_p''\}$ се бази на векторските простори V , U и W соодветно, и нека $f: V \rightarrow U$ и $g: U \rightarrow W$ се линеарни пресликувања. Тогаш важи $[g \circ f]_{e'', e} = [g]_{e'', e'} [f]_{e', e}$, т.е. матричната репрезентација на композицијата е производ на матричните репрезентации на линеарните пресликувања, кои ја образуваат композицијата.

Доказ. Доказот се спроведува аналогно како кај претходната теорема. Имено, за секоја вектор-колона $[v]_e \in V$, важи

$$\begin{aligned} ([g]_{e'', e'} [f]_{e', e}) [v]_e &= [g]_{e'', e'} ([f]_{e', e} [v]_e) = [g]_{e'', e'} [f(v)]_{e'} = [g(f(v))]_{e''} = \\ &= [(g \circ f)(v)]_{e''} = ([g \circ f]_{e'', e}) [v]_e. \end{aligned}$$

Според тоа, важи равенството $[g \circ f]_{e'', e} = [g]_{e'', e'} [f]_{e', e}$. ■

Горната теорема покажува дека при пресликувањето $f \mapsto [f]$, на композиција на линеарни пресликувања соодветствува производ на матрици.



Задачи за самостојна работа

1. Најди ја матричната репрезентација на следните линеарни пресликувања

а) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4, x_2 - x_3 + 2x_4, x_1 - 3x_2, x_1 + x_2)$;

б) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4, 2x_1 - 5x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_3)$;

в) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_2 - 2x_3, x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_3)$,

во однос на стандардните бази на $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$.

2. Која матрица соодветствува на нултото линеарно пресликување, а која на идентичното пресликување во однос на произволна база?

3. Запиши ја формулата на линеарното пресликување $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ кое во однос на стандардните бази има матрична репрезентација $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Нека f и g се линеарни трансформации во векторскиот простор од 2×2 матрици кои во однос на дадена база имаат матрична репрезентација $[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $[g] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Најди ги матриците на линеарните пресликувања $f + g$, $g \circ f$, $2f$ во однос на истата база.

5. Избери два векторски простори V и U со стандардните бази и две линеарни пресликувања $f, g: V \rightarrow U$, а потоа на конкретен пример провери ја точноста на теорема 2.

6. Избери три векторски простори V , U и W со стандардните бази, и две линеарни пресликувања $f: V \rightarrow U$, $g: U \rightarrow W$ а потоа на конкретен пример провери ја точноста на теорема 3.

5.13. Матрици и системи линеарни равенки

Системот од m линеарни равенки со n непознати

[illegible]

еднозначно е определен со матричната равенка

$$AX = B$$

каде што

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

согласно со познатите операции множење на матрици и равенство на матрици.

Матрицата A се вика **коефициентна матрица** (или матрица од коефициенти) на системот (1), а матрицата

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

се нарекува **проширена матрица** на системот (1). Системот (1) е наполно определен со својата проширена матрица. При изучување на линеарните системи, поедноставно е да се користи матричната терминологија.

Теорема 1. Нека $U_1, U_2, \dots, U_s$ се решенија на хомогениот систем линейни равенки $AX=0$. Тогаш секоја линейна комбинација $k_1U_1 + k_2U_2 + \dots + k_sU_s$ за произволно избрани скалари $k_i, i=1, 2, \dots, s$ е исто така решение на системот $AX=0$. Специјално, ако U е решение на системот $AX=0$, тогаш kU е исто така решение на системот $AX=0$.

Доказ. Фактот дека $U_1, U_2, \dots, U_s$ се решенија на системот $AX=0$ означува дека $AU_1 = AU_2 = \dots = AU_s = 0$. Затоа,

$$A(k_1U_1 + k_2U_2 + \dots + k_sU_s) = k_1AU_1 + k_2AU_2 + \dots + k_sAU_s = k_1O + k_2O + \dots + k_sO = O,$$

Според тоа, $k_1U_1 + k_2U_2 + \dots + k_sU_s$ е решение на $AX=B$. ■

Теорема 2. Системот линеарни равенки $AX=B$ ($B \neq 0$) или е противречен, или има единствено решение, или има бесконечно многу решенија.

Доказ. Доволно е да се докаже дека ако системот има две различни решенија U_1 и U_2 , тогаш тој има бескрајно многу решенија. Од $AU_1 = B$ и $AU_2 = B$ за произволен реален број k добиваме дека

$$A(U_1 + k(U_1 - U_2)) = AU_1 + kA(U_1 - U_2) = B + k(AU_1 - AU_2) = B + k(B - B) = B,$$

од каде што заклучуваме дека $U_1 + k(U_1 - U_2)$ е решение на системот за секој $k \in \mathbb{R}$. Бидејќи $U_1 \neq U_2$ за различни вредности на k добиваме различни решенија. ■

Со последнава теорема ги потврдиме резултатите до кои дојдовме по елементарен пат во 5.2 во врска со бројот на решенија на систем линеарни равенки.



Задачи за самостојна работа

1. Запиши го во матричен вид следниот систем линеарни равенки:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = 1 \\ x - y + 3z + 2t = -10; \\ -5y + 3z + 2t = -3 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y - z + t - u = -3 \\ -2x - 10z - t + u = 2 \end{cases}$$

2. Запиши го системот линеарни равенки зададен со проширената матрица:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Без да го решаваеш системот зададен со проширената матрица, обиди се да одговориш дали тој има решение и дали тоа е единствено:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5.14. Скалести матрици

За матрицата $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ велиме дека е **скалеста**, или има скалеста форма, ако втората редица започнува со барем еден ненулта елемент и секоја наредна редица во почетокот има барем еден нулта елемент повеќе од претходната редица. Тоа значи, дека ако со t_i се означат бројот на почетните нули во i -та редица ($1 \leq i \leq m$), тогаш

$$t_1 < t_2 < \dots < t_r = t_{r+1} = \dots = t_m = n,$$

(ако $m - r$ - те последни редици се со сите нулта елементи) или

$$t_1 < t_2 < \dots < t_m$$

(ако првите $m - 1$ редици се ненулти).

Првите ненулти елементи во секоја редица се викаат **издвоени** елементи.

Пример 1. Следните матрици имаат скалеста форма

$$A = \begin{bmatrix} 2^* & 3 & 1 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3^* & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1^* & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1^* & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* \end{bmatrix},$$

и издвоените елементи во нив се означени со ѕвезда. ♦

Во специјален случај, една скалеста матрица се вели дека има **редично редуцирана скалеста форма**, ако издвоените елементи се единици и притоа тие се единствените ненулти елементи во соодветните колони. Матрицата C во претходниот пример има редично редуцирана скалеста форма, додека A и B немаат редично редуцирана скалеста форма.



Задачи за самостојна работа

1. Избери две матрици кои имаат скалеста форма, но не и редично редуцирана скалеста форма изначи ги издвоените елементи.
2. Избери две матрици кои имаат редично редуцирана скалеста форма.
3. Дали нултата матрица има
 - а) скалеста форма;
 - б) редично редуцирана скалеста форма?
4. Запиши ги сите можни 2×2 матрици со редично редуцирана скалеста форма.
5. Дали скалестата форма на една матрица е единствена?
6. а) Дали секоја дијагонална квадратна матрица со ненулти елементи по дијагоналата има скалеста форма?
 б) Дали секоја дијагонална квадратна матрица има скалеста форма?

5.15. Редична еквивалентност и елементарни трансформации со редици

Една матрица A е редично еквивалентна со матрица B , ако матрицата B може да се добие од матрицата A со конечна низа од следните **елементарни редични трансформации**:

E_1 : Замена на i -та редица со j -та редица и обратно, односно $R_i \leftrightarrow R_j$;

E_2 : Множење на i -та редица со ненулти скалар k , односно $R_i \rightarrow kR_i$, ($k \neq 0$);

E_3 : j -та редица помножена со k се додава на i -та редица, односно $R_i \rightarrow kR_j + R_i$ (притоа сите редици освен i -тата остануваат непроменети).

Со комбинација на трансформациите E_2 и E_3 се добива следната трансформација:
 i -тата редица се множи со ненулта скалар k и кон неа се додава j -тата редица помножена со произволен број k' , односно

$$E_2 \wedge E_3: R_i \rightarrow kR_i + k'R_j, \quad k \neq 0.$$

Аналогни трансформации на овие три трансформации може да се применат на систем линеарни равенки и при секоја таква извршена трансформација добиваме систем еквивалентен со претходниот. Имено, ако две равенки во системот си ги заменат местата се добива еквивалентен систем; ако некоја од равенките се поможи со ненулта скалар се добива еквивалентен систем и ако некоја равенка помножена со некој скалар се додаде на друга равенка се добива еквивалентен систем (види теорема 1 во 5.1).

Следниот алгоритам ни овозможува трансформација на матрици во скалеста форма со помош на редични трансформации.

Чекор 1. Нека j_1 -та колона е првата колона со ненулта елементи. Редиците ги заменуваме така што $a_{1j_1} \neq 0$. (трансформација E_1)

Чекор 2. За секој i ($i > 1$) се применува комбинираната трансформација

$$R_i \rightarrow -a_{ij_1} R_1 + a_{1j_1} R_i$$

Да уочиме дека со чекор 2 сите елементи во j_1 -та колона под елементот a_{1j_1} се сведуваат на нула. Чекорите 1 и 2 се повторуваат за подматрицата добиена со изоставување на првата редица. Овој процес продолжува се додека матрицата не се трансформира во скалеста форма.

Пример 1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -5R_2 + 4R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \blacklozenge$$

Да претпоставиме дека матрицата $A = [a_{ij}]$ е доведена во скалеста форма со издвоени елементи $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$. Со цел да ја трансформираме матрицата до редично редуцирана матрична форма постапуваме на следниот начин:

За $i = 2$ ги применуваме следните комбинирани редични трансформации:

$$R_k \rightarrow -a_{kj_1} R_1 + a_{1j_1} R_k, \quad k = 1, 2, \dots, i-1.$$

Потоа ги применуваме истите трансформации за $i = 3, i = 4, \dots, i = r$.

На тој начин матрицата A се трансформира до скалеста форма чишто издвоени елементи се единствените ненулта елементи во соодветните колони. Потоа множејќи ја i -та редица со $a_{1j_1}^{-1}$, $1 \leq i \leq r$, издвоените елементи стануваат единици, а со тоа конечно матрицата сме ја трансформирале до редично редуцирана скалеста форма.

Со тоа докажавме дека **секоја матрица A е редично еквивалентна со барем една матрица во редично редуцирана скалеста форма**. Подоцна ќе видиме дека редично редуцираната скалеста форма на матрицата A е единствена и затоа ќе ја наречеме **редична канонична форма на A** .

Пример 2. Матрицата од претходниот пример ќе ја трансформираме до редично редуцирана скалеста форма:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 4R_1 + 3R_2} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1, R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2, R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacklozenge$$

Пример 3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \blacklozenge$



Задачи за самостојна работа

1. Со помош на редични трансформации, трансформирај ги следните матрици во скалеста форма:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Со помош на редични трансформации, трансформирај ги следните матрици во редична канонична форма:

а) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -11 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Каков е обликот на една матрица во редична канонична форма, ако нејзината транспонирана матрица е исто така во редична канонична форма.

4. Каков е обликот на една произволна
а) 3×1 матрица, б) 1×3 матрица,
во редична канонична форма?

5. Докажи дека релацијата редична еквивалентност на матрици е релација на еквивалентност, односно таа е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

5.16. Редичен простор на матрица

Нека A е дадена $m \times n$ матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Редиците на матрицата A

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), R_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

разгледувани како вектори во $\mathbb{R}^n$ генерираат потпростор од $\mathbb{R}^n$, наречен **редичен простор** на матрицата A , и тој се означува со $L(R_1, R_2, \dots, R_m)$. Аналогно и колоните на матрицата A , разгледувани како вектори во $\mathbb{R}^m$ генерираат потпростор од $\mathbb{R}^m$ наречен **колониен простор** на матрицата A .

Да ги примениме сега елементарните редични трансформации на матрицата A . По извесен број трансформации нека сме ја добиле матрицата B . Со примена на секоја од трансформациите:

- (i) $R_i \leftrightarrow R_j$;
- (ii) $R_i \rightarrow kR_i$;
- (iii) $R_i \rightarrow kR_j + R_i$,

редичниот простор на матрицата останува непроменет. Затоа, матриците A и B имаат ист редичен простор. Според тоа важи следната теорема:

Теорема 1. Редично еквивалентните матрици имаат ист редичен простор.

Важи и следниот посилен резултат:

Теорема 2. Редично редуцираните скалести матрици имаат ист редичен простор ако и само ако имаат исти ненулти редици.

Доказ.* Ако матриците A и B имаат исти ненулти редици во редично редуцирана канонична форма, јасно е дека тие имаат ист редичен простор.

Обратно, нека матриците A и B имаат ист редичен простор, како потпростор од $\mathbb{R}^n$, на пример. Тогаш, двете матрици A и B имаат по n колони. Освен тоа, ако матриците A и B имаат различен број редици, можеме да додадеме нулти редици на матрицата со помал број редици, така што двете матрици ќе имаат ист број редици и редичниот простор нема да им се промени. Значи, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека двете матрици имаат исти димензии, на пример $m \times n$. Со индукција по m ќе докажеме дека A и B имаат исти ненулти редици.

Нека $m=1$. За матриците A и B да имаат ист редичен простор, неопходно е нивните вектор-редици да бидат колинеарни. Но, бидејќи првиот ненулти елемент во вектор-редицата на A и вектор-редицата на B е еднаков на 1, тие вектор-редици се еднакви. Со тоа е докажано тврдењето во овој специјален случај.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за матрицата со $m-1$ редица. Нека A и B се $m \times n$ матрици во редично редуцирана скалеста форма, кои имаат ист редичен простор. Да ги означиме со R_A и R_B ненултите редици на A и B соодветно, што започнуваат со најголем број нули. Прво ќе покажеме дека овие две редици започнуваат со ист број нули. Навистина, ако на пример R_A започнува со поголем број нули од R_B , со тоа започнува со поголем број нули и од секоја од редиците на матрицата B , па јасно е дека R_A не припаѓа на

редичниот простор на матрицата B . Имено, R_A не може да се изрази како линеарна комбинација од редицата на матрицата B . Според тоа, неопходно е R_A и R_B да почнуваат со ист број нули. Бидејќи сите ненулни редични вектори на матрицата A започнуваат со различен број нули, а редицата R_B е линеарна комбинација од векторите на A , тоа е можно само ако $R_B = \lambda R_A$. Но, првите ненулни елементи на R_A и R_B се единици, а тоа е можно само ако $\lambda = 1$, т.е. $R_A = R_B$. Освен тоа, и колоните на матриците A и B кои ги содржат првите ненулни елементи на редиците R_A и R_B (означени со $*$) се еднакви, бидејќи матриците A и B се во редично редуцирана канонична форма.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & & & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1^* & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} (R_A), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \dots & & & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1^* & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} (R_B).$$

Ако од матриците A и B ги отфрлиме редиците R_A и R_B , заедно со соодветните колони кои минуваат низ првиот ненулни елемент во соодветната редица (означен со $*$), добиваме $(m-1) \times (n-1)$ матрици A' и B' , кои исто така се во редично редуцирана канонична форма и освен тоа имаат ист редичен потпростор од $\mathbb{R}^{n-1}$. Према индуктивната претпоставка, матриците A' и B' имаат исти редици, па затоа и матриците A и B имаат исти редици. ■

Овој неочигледен резултат има голема примена. Според оваа теорема, **секоја матрица е еквивалентна со единствена редично редуцирана, скалеста форма која се нарекува редична канонична форма.**

За да провериме дали два редични потпростори на две матрици се еднакви, двете матрици ги доведуваме до редично редуцирана канонична форма (т.е. редична канонична форма). Ако тие имаат исти ненулни редици, тогаш двата редични потпростори се еднакви, а ако пак, тие се разликуваат во барем една редица, тогаш двата редични потпростори се различни.

Пример 1. Во $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ нека U е потпросторот генериран со векторите

$$u_1 = (1, 2, -1, 3), \quad u_2 = (2, 4, 1, -2) \quad \text{и} \quad u_3 = (3, 6, 3, -7),$$

а V е потпросторот генериран со векторите

$$v_1 = (1, 2, -4, 11) \quad \text{и} \quad v_2 = (2, 4, -5, 14).$$

За да провериме дали овие два потпростори се еднакви, ги формираме матриците

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

и со елементарни трансформации ги наоѓаме нивните редично редуцирани канонични форми:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Бидејќи тие имаат исти ненулти редици, потпросторите U и V се еднакви.

Да забележиме дека задачата може да се реши и елементарно. Имено, може да се покаже дека секој од векторите u_1, u_2 и u_3 е линеарна комбинација од v_1 и v_2 и обратно, секој од векторите v_1 и v_2 е линеарна комбинација од u_1, u_2 и u_3 . ♦



Задачи за самостојна работа

1. Провери дали во $\mathbb{R}^6(\mathbb{R})$ потпросторите генерирани соодветно со векторите $(1, 0, -2, 3, 4, 1)$, $(-2, 0, 1, 3, 5, 6)$, $(0, 0, 1, 1, 2, 0)$ и $(-2, 0, 1, 1, 4, 2)$, $(0, 0, 4, 2, 1, -1)$, $(-1, -2, 3, 1, 0, 1)$ се еднакви.
2. Провери дали во $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ потпросторите генерирани соодветно со векторите $(0, 2, 3, -1, 1)$, $(0, 1, 1, 0, -2)$, $(0, -1, 1, 2, 0)$ и $(0, 1, 1, 4, 2)$, $(0, 4, 2, 1, -1)$, $(0, 4, 2, 1, -1)$ се еднакви.
3. Провери дали во $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ потпросторите генерирани соодветно со векторите $(2, 3, -1, 1)$, $(1, 1, 0, -2)$, $(1, 2, -1, 3)$ и $(0, 1, -1, 5)$, $(4, 5, -1, -3)$ се еднакви.

4.* Аналогно на елементарните редични трансформации постојат и елементарни колонични трансформации, кои всушност се елементарни редични трансформации применети на транспонираната матрица. Со нивна помош секоја матрица може да се доведе до колонично редуцирана скалеста форма. Со помош на елементарни колонични трансформации, следната матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

доведи ја до колонично редуцирана скалеста форма (колонична канонична форма).

5.17. Ранг на матрица

Нека A е произволна $m \times n$ матрица. Димензијата на редичниот простор, односно на потпросторот од $\mathbb{R}^n$ генериран од редичните вектори на A , се нарекува **редичен ранг** на матрицата A . Аналогно и колоничните вектори генерираат потпростор на $\mathbb{R}^m$ наречен колоничен простор, а неговата димензија се нарекува **колоничен ранг** на матрицата A .

Теорема 1. Колоничниот и редичниот ранг на една матрица се еднакви.

Доказ.* Нека е дадена матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Нејзините вектор-редици да ги означиме со

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), R_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Нека редичниот ранг на матрицата е r и нека следните r вектори

$$C_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}), C_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}), \dots, C_r = (c_{r1}, c_{r2}, \dots, c_{rn}),$$

формираат база за редичниот простор на матрицата A . Тогаш важи

$$R_1 = k_{11}C_1 + k_{12}C_2 + \dots + k_{1r}C_r$$

$$R_2 = k_{21}C_1 + k_{22}C_2 + \dots + k_{2r}C_r$$

.....

$$R_m = k_{m1}C_1 + k_{m2}C_2 + \dots + k_{mr}C_r$$

за некои скалари k_{ij} . Во координатна форма овие равенства гласат

$$a_{1i} = k_{11}c_{1i} + k_{12}c_{2i} + \dots + k_{1r}c_{ri} \quad (1 \leq i \leq r)$$

$$a_{2i} = k_{21}c_{1i} + k_{22}c_{2i} + \dots + k_{2r}c_{ri} \quad (1 \leq i \leq r)$$

.....

$$a_{mi} = k_{m1}c_{1i} + k_{m2}c_{2i} + \dots + k_{mr}c_{ri} \quad (1 \leq i \leq r).$$

Затоа, за секој $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = c_{1i} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{bmatrix} + c_{2i} \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{bmatrix} + \dots + c_{ri} \begin{bmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{bmatrix}.$$

Значи секоја од колоните на A е линеарна комбинација од векторите

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{bmatrix},$$

а нив ги има r . Затоа колоничниот простор има димензија најмногу r , односно колоничниот ранг на матрицата е најмногу r . Значи, колоничниот ранг е помал или еднаков на редичниот ранг.

Поради симетрија, ако ја разгледаме транспонираната матрица A^t добиваме дека редичниот ранг е помал или е еднаков на колоничниот ранг. Според тоа, редичниот и колоничниот ранг на матриците се еднакви. Од произволноста на матрицата A следува дека ова важи за секоја матрица. ■

Дефиниција 1. Ранг на матрицата A е редичниот, односно колоничниот ранг на A и се означува со $\text{rang}(A)$.

Значи рангот на A е максималниот број на линеарно независните вектор-редици на A , а во исто време и максималниот број на линеарно независните вектор-колони.

Пример 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Значи $\text{rang}(A) = 2$. ♦

Аналогно на елементарните редични трансформации постојат и елементарни колонични трансформации и скалеста колонична форма на матрица. На тој начин и со помош на колони може да определуваме ранг. Всушност, колоничните трансформации се редични трансформации на A^t . При наоѓањето на рангот на некоја матрица, можеме паралелно со редичните да користиме и колонични трансформации. Освен тоа, при користење на двата типа трансформации матрицата, можеме да ја доведеме до максимално редуцирана форма, како што тоа може да се види од следниов пример.

Пример 2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значи $\text{rang}(A) = 2$. ♦

Ако е даден систем вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$, во $\mathbb{R}^n$ тогаш под ранг на овој систем вектори се подразбира димензијата на потпросторот генериран со овие вектори, односно рангот на матрицата чии редици или колони се дадените вектори.



Задачи за самостојна работа

1. Најди го рангот на матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$

2. Најди го рангот на матрицата:

а) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 10 & 16 \\ 7 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

в) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

3. Најди го рангот на системот вектори:

$(-1, 5, 0, 3, 8), (7, -2, 7, 3, -4), (2, 1, 3, 4, 2), (2, 1, 3, 4, 2), (4, 1, 4, 2, 2).$

4. Докажи дека системот вектори $v_1, v_2, \dots, v_n$ е линеарно независен ако и само ако рангот на тој систем вектори е еднаков на n .

5. Докажи, дека рангот на една $n \times m$ матрица е помал или е еднаков на помалиот од броевите n и m .

6. За колку ќе се промени рангот на една матрица ако од неа отфрлиме една редица (колона)?

5.18. Важноста на рангот на матрица за систем линеарни равенки

Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или во матрична форма

$$AX = B,$$

каде $A = [a_{ij}]$ е матрицата од коефициенти, $X = (x_i)$ и $B = (b_i)$ се вектор-колони од променливите и слободните членови на системот, соодветно. Матрицата

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

е проширената матрица на системот.

Равенките во дадениот систем се нарекуваат зависни или независни во зависност од тоа дали вектор-редиците на проширената матрица се зависни или се независни.

Два система од линеарни равенки се нарекуваат еквивалентни, ако и само ако нивните проширени матрици имаат ист редичен простор. Секогаш можеме да замениме еден систем од равенки со еквивалентен систем од независни равенки во скалеста форма. Бројот на независните равенки секогаш ќе биде еднаков на рангот на проширената матрица на почетниот систем.

Забележуваме дека разгледуваниот систем е еквивалентен со следната векторска равенка

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Затоа, системот $Ax = B$ има решение, ако и само ако вектор-колоната B е линеарна комбинација од колоните на A , односно ако припаѓа на колоничниот простор на A . Затоа, системот линеарни равенки $Ax = B$ има решение, ако и само ако колоничниот ранг на матрицата A е еднаков на колоничниот ранг на проширената матрица $[A:B]$. Затоа, има место следнава важна теорема:

Теорема 1 (Кронекер-Капели) Системот од линеарни равенки $Ax = B$ има барем едно решение, ако и само ако матрицата A и проширената матрица $[A:B]$ имаат ист ранг.

Пример 1. За да се испита дали системот равенки

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

има решение, ја формираме проширената матрица и над неа применуваме елементарни редични трансформации, за да ја доведеме во скалеста форма. Потоа веднаш ќе се види колку е рангот и на основната матрица и на проширената матрица.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Рангот на основната матрица (првите две колони) е 2, а рангот на проширената матрица е 3. Затоа системот е противречен, односно нема решение. ♦

Пример 2. Постапувајќи како во претходниот пример, за системот равенки

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

добиваме

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Забележуваме дека рангот на основната матрица и рангот на проширената матрица се еднакви на 3; значи системот има барем едно решение.

Да забележиме дека теоремата на Кронекер-Капелли дава потребен е доволен услов за еден систем од линеарни равенки да има решение, но не ни кажува дали решението е единствено ако системот има решение. Во случај на хомоген систем, одговор на тоа прашање ни дава следнава теорема:

Теорема 2. Димензијата на просторот од решенија W на хомогениот систем $Ax = 0$ е $n - r$ каде n е бројот на непознати, а r е рангот на матрицата A .

Доказ. Со помош на елементарните трансформации дадениот систем се трансформира во еквивалентен систем $A'x = 0$, каде A' е во скалеста форма. Освен тоа, A и A' имаат ист ранг r . Всушност, r е бројот на ненултните редици на A' . Тогаш точно $n - r$ непознати можат да примат произволни вредности, а останатите r непознати се определуваат еднозначно. Нека слободните параметри се $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-r}}$. Нека v_j е решението на системот $A'x = 0$ добиено за $x_{i_j} = 1$, а $x_{i_k} = 0$ за $k \neq j$. Тогаш $v_1, v_2, \dots, v_{n-r}$ се линеарно независни вектори кои го генерираат просторот на решенија на $Ax = 0$. ■

Пример 3. За да се најде димензија и база на просторот W од решенија на системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3r - s = 0 \\ x + 2y - 2z + 2r + s = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3r + 4s = 0 \end{cases}$$

се извршува редукција на системот во скалеста форма:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3r - s = 0 \\ 2z - r + 2s = 0 \\ 6z - 3r + 6s = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 4z + 3r - s = 0 \\ 2z - r + 2s = 0 \end{cases}$$

Бројот на непознати е 5, а рангот е 2 и оттука просторот на решенија има димензија 3. Во скалестата форма земајќи

$$(i) \ y=1, r=0, s=0, \quad (ii) \ y=0, r=1, s=0, \quad (iii) \ y=0, r=0, s=1$$

ги добиваме соодветните решенија: $v_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0)$, $v_3 = (-3, 0, -1, 0, 1)$.

Множеството $\{v_1, v_2, v_3\}$ е база за просторот од решенија W .



Задачи за самостојна работа

Да се провери дали следните системи имаат решенија (зад. 1-2).

$$1. \ a) \begin{cases} 2x - y + 2z - 2t = -2 \\ -x + 2y - z + t = 4 \\ -x + y - z + t = 2 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x - y + z - 2t = -1 \\ 2x - 2y + 2z - 3t = 0 \\ x - y + z - t = -2 \end{cases}$$

$$2. \ a) \begin{cases} 2x - y + 3z - 4t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} x + 3y + 2z - 2t = -2 \\ x + 2y - z + t = 4 \\ -x - y + 4z - 4t = -4 \end{cases}$$

Опреди ја димензијата на просторот на решенија на системите (зад. 3-5).

$$3. \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - y + 2z - t + 5u + v = 0 \\ -x + 2y + z - t + u - v = 0 \end{cases}$$

5.19. Инверзна матрица

Една квадратна матрица A се нарекува **инверзибилна** (несингуларна или регуларна), ако постои матрица B од ист ред како A , така што да важи

$$AB = BA = I.$$

Матрицата B , ако постои, е единствена, бидејќи од $AB_1 = B_1A = I$ и $AB_2 = B_2A = I$ следува дека $B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$.

Матрицата B ќе ја нарекуваме **инверзна** на A и ќе ја означуваме со A^{-1} .

Пример 1. Од $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, следува дека

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \blacklozenge$$

Очигледно е дека $(A^{-1})^{-1} = A$. Освен тоа, ќе покажеме дека $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ако A и B се инверзибилни. Имено, тоа следува од равенствата

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I \text{ и } (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = I.$$

Пример 2. Нека е зададена 2×2 матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. За да ја најдеме матрицата A^{-1}

(ако постои), треба да го решиме системот $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, односно $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$

и $\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$. Од овде се добива $x = \frac{d}{\det A}$, $y = \frac{-b}{\det A}$, $z = \frac{-c}{\det A}$, $t = \frac{a}{\det A}$, ако $\det A = ad - bc \neq 0$.

Значи ако $\det A \neq 0$, тогаш дадената матрица е инверзибилна и нејзината инверзна матрица е

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Забележуваме дека добиената матрица A^{-1} , при $\det A \neq 0$, го исполнува условот $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Според тоа, при $\det A \neq 0$ матрицата A е инверзибилна и A^{-1} е бараната инверзна матрица.

Во продолжение, ќе изведеме формула за наоѓање на инверзната матрица на произволна инверзибилна 3×3 матрица. Нека е дадена матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

За секој од елементите a_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3\}$, постои соодветниот алгебарски комплемент A_{ij} .

Имено, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, каде што Δ_{ij} е минорот што одговара на елементот a_{ij} .

Алгебарскиот комплемент што го знаеме беше за и всушност, алгебарскиот комплемент се однесува за дадената шема од 3×3 броеви и е добро дефиниран за квадратната матрица A .

Да ја разгледаме транспонираната матрица од матрицата составена од алгебарските комплементи. Таа се нарекува **адјунгирана матрица** за A и се означува со $\text{adj}A$. Значи, по дефиниција имаме

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Да ги побараме сега производите $A \cdot \text{adj}A$ и $\text{adj}A \cdot A$:

$$\begin{aligned}
 A \cdot \text{adj}A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I, \\
 \text{adj}A \cdot A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} & A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} & A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + A_{32}a_{31} & A_{12}a_{12} + A_{22}a_{22} + A_{32}a_{32} & A_{12}a_{13} + A_{22}a_{23} + A_{32}a_{33} \\ A_{13}a_{11} + A_{23}a_{21} + A_{33}a_{31} & A_{13}a_{12} + A_{23}a_{22} + A_{33}a_{32} & A_{13}a_{13} + A_{23}a_{23} + A_{33}a_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I.
 \end{aligned}$$

Според тоа, ако $\det A \neq 0$, тогаш за матрицата $B = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A$, важи $AB = BA = I$. Тоа пак, значи дека матрицата B е токму инверзната матрица на матрицата A , односно

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A. \quad (1)$$

За пресметување на инверзната матрица на дадена матрица, доколку таа постои, има повеќе методи. Методот со решавање на систем равенки, што го применивме за инверзна на 2×2 матрица е еден од попростите методи и може да се примени за секоја квадратна матрица. Доколку матрицата е инверзибилна, нејзината инверзна матрица ќе биде најдена. Формулата (1) може да се обопшти за произволна квадратна матрица, меѓутоа општиот случај овде нема да го разгледуваме, бидејќи се ограничивме на разгледување само на детерминанти од втор и од трет ред. Покрај овие два метода, постои и Гаусов метод за наоѓање на инверзна матрица, кој е практичен за работа и лесно применлив за секоја квадратна матрица. Со него ќе се запознаеме во продолжение.



Задачи за самостојна работа

1. Доколку следните матрици се инверзибилни,

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix};$

в) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix};$

г) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 25 \end{bmatrix};$

најди ги нивните инверзни матрици.

2. Доколку следните матрици се инверзибилни,

а) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix};$

в) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix};$

најди ги нивните инверзни матрици.

3. Најди ги инверзните матрици на матриците:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix};$

в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix};$

4. Нека $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е дијагонална матрица, каде што $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$. Најди ја инверзната матрица на матрицата D .

5. Реши ја матричната равенка $AX + B = 2Y$, ако

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

6. Докажи дека множеството од сите несингуларни квадратни матрици од ред n е група во однос на множењето на матрици.

7. Ако на една биективна линеарна трансформација соодветствува матрица A , докажи дека на инверзната трансформација соодветствува инверзната матрица A^{-1} .

5.20. Елементарни трансформации и примена

Една матрица се нарекува **елементарна**, ако може да се добие само со една елементарна речична трансформација применета на единичната матрица I . Според тоа имаме три вида елементарни матрици:

$R_i \leftrightarrow R_j :$

$$\begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}; \quad (i \neq j)$$

$R_i \rightarrow kR_i :$

$$\begin{matrix} & & i & & \\ & & & & \\ i & & & & \\ & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, \dots, k, 1, \dots, 1);$$

$R_i \rightarrow kR_j + R_i :$

$$\begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

Пример 1. Елементарни 3×3 матрици се:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, k \neq 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \diamond$$

Теорема 1. Нека $\bar{e}$ е елементарна редична трансформација, а E е соодветната $m \times m$ квадратна елементарна матрица, односно $E = e(I)$. Тогаш за произволна $m \times n$ матрица A важи $e(A) = EA$, односно исходот од примената на трансформацијата $\bar{e}$ претставува множење од лево со соодветната елементарна матрица E .

Доказ. Нека R_i е i -та редица на A ($1 \leq i \leq m$). Матрицата A ќе ја запишеме како $A = (R_1, R_2, \dots, R_m)$. Тогаш, ако AB е дефинирана, важи $AB = (R_1B, R_2B, \dots, R_mB)$. Нека

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Тогаш $I = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ и $e_i(A) = R_i$. Можни се следниве три случаи:

(i) Ако $\bar{e}$ е елементарната трансформација $R_i \leftrightarrow R_j$, тогаш

$$E = \bar{e}(I) = \bar{e}(e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_m) = (e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_m)$$

и

$$\bar{e}(A) = (R_1, \dots, R_j, \dots, R_i, \dots, R_m).$$

Затоа,

$$EA = (e_1 A, \dots, e_j A, \dots, e_i A, \dots, e_m A) = (R_1, \dots, R_j, \dots, R_i, \dots, R_m) = \bar{e}(A).$$

(ii) Ако $\bar{e}$ е елементарната трансформација $R_i \rightarrow kR_i$, тогаш

$$E = \bar{e}(I) = (e_1, \dots, ke_i, \dots, e_m) \text{ и } \bar{e}(A) = (R_1, \dots, kR_i, \dots, R_m).$$

Затоа,

$$EA = (e_1 A, \dots, ke_i A, \dots, e_m A) = (R_1, \dots, kR_i, \dots, R_m) = \bar{e}(A).$$

(iii) Ако $\bar{e}$ е елементарната трансформација $R_i \rightarrow kR_j + R_i$, тогаш

$$E = \bar{e}(I) = (e_1, \dots, ke_j + e_i, \dots, e_m) \text{ и } \bar{e}(A) = (R_1, \dots, kR_j + R_i, \dots, R_m).$$

Користејќи дека $(ke_j + e_i)(A) = k(e_j A) + e_i A = kR_j + R_i$, добиваме

$$EA = (e_1 A, \dots, (ke_j + e_i)A, \dots, e_m A) = (R_1, \dots, kR_j + R_i, \dots, R_m) = \bar{e}(A). \blacksquare$$

Пример 2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & k & 3k \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix},$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2k & k+5 & 3k+1 \end{bmatrix} \diamond$$

Како последица од теоремата добиваме:

Последица 1. Матрицата A е редично еквивалентна со матрицата B , ако постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$, така што $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = B$.

Доказ. Матрицата A е редично еквивалентна со B по дефиниција, ако постојат трансформации $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_s$ за кои $\bar{e}_s(\cdots(\bar{e}_2(\bar{e}_1 A))\cdots) = B$. Но според горната теорема тоа важи, ако и само ако $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = B$, каде E_i е елементарната матрица соодветна на $\bar{e}_i$. ■

Последица 2. Елементарните матрици се инверзибилни и нивните инверзни матрици се пак елементарни матрици.

Доказ. Според горната теорема, доволно е да се докаже дека секоја елементарна редична трансформација е инверзибилна и дека нејзината инверзна матрица е пак елементарна редична трансформација.

(i) Нека елементарната редична трансформација $\bar{e}$ е $R_i \leftrightarrow R_j$. Тогаш $\bar{e} \circ \bar{e} = \varepsilon$, па $\bar{e} = (\bar{e})^{-1}$.

(ii) Нека елементарната редична трансформација $\bar{e}$ е $R_i \rightarrow kR_i$, ($k \neq 0$). Тогаш, ако $\bar{e}'$ е елементарната редична трансформација $R_i \rightarrow \frac{1}{k}R_i$, добиваме $\bar{e} \circ \bar{e}' = \varepsilon$ и $\bar{e}' \circ \bar{e} = \varepsilon$, што значи дека $\bar{e}' = (\bar{e})^{-1}$.

(iii) Нека елементарната редична трансформација $\bar{e}$ е $R_i \rightarrow kR_j + R_i$. Нека $\bar{e}'$ е елементарната редична трансформација $R_i \rightarrow R_i - kR_j$. Тогаш $\bar{e} \circ \bar{e}' = \varepsilon$ и $\bar{e}' \circ \bar{e} = \varepsilon$, што значи дека $\bar{e}' = (\bar{e})^{-1}$. ■

Пример 3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Теорема 3. Следните услови се меѓу себе еквивалентни:

- (i) A е инверзибилна матрица;
- (ii) A е редично еквивалентна со единичната матрица I ;
- (iii) A е производ на елементарни матрици.

Доказ. (i) $\Rightarrow$ (ii): Нека A е инверзибилна матрица. Да претпоставиме дека A е редично еквивалентна со редично редуцирана скалеста матрица B . Ќе покажеме дека $B = I$. Постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$, така што $E_s E_{s-1} \dots E_2 E_1 A = B$. Бидејќи A е инверзибилна, а исто така и $E_1, E_2, \dots, E_s$, се инверзибилни, следува дека и B е инверзибилна. Ако $B \neq I$, тогаш B има нулта редица (последната редица). Тогаш за произволна квадратна матрица B' од ист ред како и B , последната редица на BB' е нулта, па значи $BB' \neq I$. Значи, B не е инверзибилна, што претставува контрадикција. Затоа, $B = I$ и $E_s E_{s-1} \dots E_2 E_1 A = I$ што покажува дека A е редично еквивалентна со I .

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ако A е редично еквивалентна со I , тогаш постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$, такви што $E_s E_{s-1} \dots E_2 E_1 A = I$. Затоа, $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1}$ и бидејќи E_i^{-1} се елементарни матрици, A е производ од елементарни матрици.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Ако важи (iii), т.е. $A = E_1 E_2 \dots E_s$, тогаш A е инверзибилна како производ на инверзибилни матрици. ■

Теорема 4. Нека A и B се квадратни матрици од ист ред. Ако $AB = I$, тогаш $B = A^{-1}$. Имено, $AB = I$ ако и само ако $BA = I$.

Доказ.* Нека за квадратните матрици A и B важи $AB = I$ и да претпоставиме дека A не е инверзибилна матрица. Тогаш A не е редично еквивалентна со единичната матрица I и постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$ така што $E_s E_{s-1} \dots E_2 E_1 A$ има нулта редица.

Затоа и $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A B$ има нулта редица. Значи AB е еквивалентна со матрица која има нулта редица. Но ова претставува контрадикција, бидејќи $AB=I$. Значи A е инверзибилна матрица и постои A^{-1} . Тогаш

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}. \blacksquare$$

Нека A е инверзибилна матрица и нека на пример со елементарните редични трансформации $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_s$ таа се редуцира до единичната матрица I . Ќе покажеме дека оваа низа од елементарни редични трансформации применета на I ја дава инверзната матрица A^{-1} .

Нека E_i ($1 \leq i \leq s$) е елементарната редична матрица што одговара на трансформацијата $\bar{e}_i$. Тогаш $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = I$, односно $(E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 I)A = I$. Затоа, $A^{-1} = E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 I$, односно A^{-1} се добива со примена на елементарните редични трансформации $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_s$ кон I .

Ова се користи како алгоритам за наоѓање на инверзна матрица, познат како **Гаусов алгоритам за инверзна матрица**. Него ќе го илустрираме со следниов пример.

Пример 4. Наоѓање на матрицата A^{-1} за $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} [A:I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right] = [I:A^{-1}]. \end{aligned}$$

Оттука, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$ ♦



Задачи за самостојна работа

1. Избери неколку 2×2 и 2×3 елементарни матрици од различни видови и најди ги нивните инверзни матрици. ■

Најди ја инверзната матрица на следните матрици со помош на Гаусовиот метод (2-3).

2. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$

в) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}.$

3. а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

4. Да се решат следниве матричните равенки:

а) $XA = B$,

б) $AY = B$,

ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Дали може производ на две квадратни матрици од ист ред, од кои едната е сингуларна, да биде несингуларна матрица?

6.* Запиши ја матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ како производ на елементарни матрици.

Задачи за вежбање

1. Реша ги следниве системи линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 4x - 7y + z = 5 \\ 3x - 5y + z = -4 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 4z = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x + 2y + 5z + 9t = 79 \\ 3x + 13y + 18z + 30t = 263 \\ 2x + 4y + 11z + 16t = 146 \\ x + 9y + 9z + 9t = 92 \end{cases}$

2. Избери две квадратни матрици A и B од ред

а) 2;

б) 3,

а потоа провери дали важи идентитетот: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

3. Пресметај:

а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3$;

в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4$.

4. Нека е дадена матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$, каде $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажи дека

$A^3 + A = O$.

5. Нека V е векторскиот простор на сите антисиметрични 3×3 матрици. Најди ги координатите на матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ во однос на базата

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Пресметај:

а) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$; в) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}^n$; г) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^n$.

7. Докажи дека ако матриците A и B комутираат, односно ако $AB = BA$, тогаш важат равенствата:

а) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; б) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

8. Дали пресликувањето $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, зададено со $f(x) = x^3$ е биекција?

9. Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, се пресликувања зададени со $f(x) = x^2 + 3x + 1$ и $g(x) = 2x - 3$. Најди ги пресликувањата:

а) $g \circ g$; б) $g \circ f$; в) $f \circ g$; г) $f \circ f$.

10. Нека $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, и $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, се линеарни пресликувања дефинирани со $f(x, y, z) = (y, x + z)$, $g(x, y, z) = (2z, x - y)$ и $h(x, y) = (y, 2x)$. Најди ги линеарните пресликувања:

а) $f \circ h$ и $g \circ h$; б) $h \circ f$ и $h \circ g$; в) $h \circ (f + g)$ и $h \circ f + h \circ g$.

11. Најди го линеарното пресликување $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, зададено со $f(1, 2) = (2, 1, 0)$ и $f(2, 1) = (0, 1, 2)$.

12. Нека $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ е матрицата на линеарното пресликување $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, во однос на

стандардната база.

а) Најди ги сликите на векторите $(0, 1, 1)$ и $(1, 2, 3)$;

б) Дали векторите $(0, 0, 0, 7)$ и $(4, 4, 4, 9)$ се слики на некои вектори?

13. Дали постои несингуларно линеарно пресликување $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$?

14. Најди го рангот на матриците: A , B и $A + B$, ако:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Дадени се две матрици A и B од ист тип, при што $\text{rang}(A)=3$, а $\text{rang}(B)=5$. Може ли рангот на матрицата $A+B$ да биде:

- а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5; ж) 6; з) 8; с) 9?

16. Со примена на Кроникер-Капели, испитај дали следните системи

а)
$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases};$$

б)
$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ -x - y + 6z = 1 \end{cases};$$

в)
$$\begin{cases} 2x + y - 3z + u + 2v = 2 \\ x - y + z - t - u + v = 5 \\ 3x + 2y - z + 2t - u - v = 1 \\ 2x + y + z + t - u + 2v = 3 \end{cases}$$

имаат решенија.

17. За кои вредности на параметарот p , системот равенки

а)
$$\begin{cases} x + y + 4z - t = 3 \\ x - 2y + 3z + t = 2 \\ x + y + 4z - t = p + 1 \end{cases};$$

б)
$$\begin{cases} x + 2y - z + 4t = 2 \\ x - 3y + 2z - 3t = -1 \\ x + 7y - 4z + 11t = p \end{cases}$$

има решение?

18. Дали следните множества вектори

а) $\{(1,2,0,-1), (-2,0,1,1)\}$ и $\{(-1,2,1,0), (-3,-2,1,2), (-1,6,2,-1)\}$

б) $\{(1,2,1,2), (2,0,1,-2)\}$ и $\{(0,0,1,1), (3,2,2,0)\}$

генерираат ист потпростор од $\mathbb{R}^4$?

19. Дадените матрици доведи ги во канонична скалеста форма:

а)
$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix};$$

б)
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 10 & 7 \end{bmatrix};$$

в)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

20. Ако A е инверзибилна матрица од ред

- а) 2; б) 3,

докажи дека $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

21. Најди ги сите елементарни матрици E , такви што $E^2 = I$.

22. Најди ги инверзните матрици на матриците

а)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix};$$

б)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

в)
$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{bmatrix},$$

со помош на адјунгирана матрица.

23. Најди ги инверзните матрици на матриците:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

со помош на Гаусовиот алгоритам.

24. Реши ги следните матрични равенки:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ 2 & 15 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

25. Докажи дека ако E е елементарна матрица, тогаш E^t е исто така елементарна матрица.

26. Докажи дека ако A е несингуларна квадратна матрица, тогаш и A^t е исто така несингуларна квадратна матрица и притоа важи формулата $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

PROSVETNO DELO

Одговори и решенија на задачите

1.1.

1. а) 7; б) 0; в) 1; г) $-2b^3$. 2. Упатство: Од втората редица извлечи множител а.
Одг. 0. 3. а) $x_1=3, x_2=-3$; б) $x_1=0, x_2=1$; в) $x_1=-2, x_2=-\sqrt{5}, x_3=\sqrt{5}$. 4. а) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$;
б) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, в) $x \in (-7, 1)$.

1.2.1.

1. а) $x=2, y=1$; б) $x=5, y=-3$; в) $x=1, y=\frac{1}{5}$. 2. а) Системот е противречен,
б) системот има бесконечно многу решенија, решение е секој пар броеви $x=t, y=\frac{\sqrt{3}}{3}(t-1)$, каде што $t \in \mathbb{R}$, в) за $k \neq 2$ системот е противречен, а за $k=2$ тој има
бесконечно многу решенија. 3. а) За произволно а и $b \neq -3$; б) за $a=2$ и $b=-3$; в) за $a \neq 2$
и $b=-3$. 4. $k=9$. 5. $k=2$. 6. а) $m \neq -4$; б) $m=-4, n \neq 10$; в) $m=-4, n=10$.

1.2.2.

1. а) Решение е секоја тројка броеви $x=-t-8, y=11, z=t$, каде $t \in \mathbb{R}$; б) системот е
противречен. 2. а) $x=t, y=5t, z=11t$, каде $t \in \mathbb{R}$; б) решение е секоја тројка (x, y, z) , каде
 $3x-2y+z=0$; в) ако $a=-1$, тогаш системот е еквивалентен со равенката $x-y-z=0$ и има
бесконечно многу решенија. Ако $a=1$, тогаш системот е противречен. Ако $a \neq \pm 1$, тогаш
решение на системот е секоја тројка (x, y, z) , каде $x=-t, y=(a-1)t, z=t$, каде $t \in \mathbb{R}$.

1.3.1.

1. а) 4; б) 33; в) $a^4+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$;
г) $(a-b)(b-c)(c-a)$. 2. а) $x_1=3, x_2=2$; б) $x_1=-1, x_2=-2$; в) $x_1=a, x_2=b$.
3. а) $x^2+y^2+z^2+1$; б) 0; в) ax^2+bx+c .

1.3.2.

2. а) 1; б) 2; в) $3abc-a^3-b^3-c^3$. 3. а) 0; б) 20; в) $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

1.3.3.

1. а) 0; б) 6; в) 0. 3. а) Упатство: Првата редица додај ја на втората редица, а потоа
помножена со -2 додај ја на третата редица. Притоа се добива детерминантата
- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

- На крај, втората редица помножена со $\frac{3}{2}$ додај ја на третата редица. Одг. 5; б) 0;
в) Упатство: Замени ги местата на првата и на втората редица. Одг. 2.

1.4.1.

1. а) $(1, -2, 1)$; б) нема решение; в) $x = \frac{5}{11}(1-t)$, $y = \frac{1}{11}(9+13t)$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Детерминантата на системот е $\Delta = -a^2 + 3a - 3 \neq 0$ за секој $a \in \mathbb{R}$. Системот има единствено решение: $x = \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 3a + 3}$, $y = \frac{-1}{a^2 - 3a + 3}$, $z = \frac{5a + 38}{2(a+2)}$, каде што a е параметар.
3. а) За $a = 2$ системот има бесконечно многу решенија; б) за $a = -2$ системот нема решение; в) за $a \neq 2$ и $a \neq -2$ системот има единствено решение: $x = \frac{35}{2(a+2)}$, $y = \frac{21}{2(a+2)}$, $z = \frac{5a+38}{2(a+2)}$.
4. Упатство: а) Реципрочните вредности на $x+y+z$, $y-2x$ и $3z-y$ замени ги со u , v и w .
Одг. $x=3$, $y=2$, $z=1$; б) $x=4$, $y=2$, $z=1$.

1.4.2.

1. Нема решение. 2. $x=3$, $y=-2$, $z=2$. 3. $x=y=z=1$. 4. $x=1$, $y=2$, $z=-1$. 5. $x=2$, $y=-3$, $z=2$. 6. $x=1$, $y=-2$, $z=1$. 7. $x=3$, $y=-2$, $z=1$. 8. $x=5$, $y=2$, $z=-1$.

1.5.

1. Упатство: а) Третата равенка на системот е линеарна комбинација од првите две.
Одг. $x=2t$, $y=-3t$, $z=5t$, $t \in \mathbb{R}$; б) бидејќи $\Delta \neq 0$, системот нема ненулти решенија. Значи $(0,0,0)$ е единствено решение. 2. $a=-3$. 4. Упатство: $\Delta = (a-1)^2(a+2)$. Одг. $a \in \{1, -2\}$.

Задачи за вежбање

1. а) -1 ; б) 1. 2. а) $x=3$, $y=-1$; б) $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$. 6. 1. 7. $x \in (-6, -4)$. 8. $a=12$.
9. а) $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a+c}{2}$, $z = \frac{b+c}{2}$; б) Системот најлесно ќе го решиш ако првин ги собереш трите равенки. Одг. $x = \frac{a-b+c}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$, $z = \frac{b+c-a}{2}$. 10. Ако $a \neq 1$ и $a \neq -2$, единствено решение е $x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$. Ако $a = -2$, системот нема решение, а ако $a = 1$, тогаш решение е секоја тројка (x, y, z) за кои $x = y + z = 1$. 11. а) $x=3$, $y=-2$, $z=1$; б) $x=5$, $y=2$, $z=-1$. 12. 264. 13. 5cm, 3cm, 6cm. 14. $a = \frac{a+m}{n+2} + \frac{a-m(1+n)}{n+2} + \frac{n(a+m)}{n+2}$. 15. $a=b$.
16. Упатство: $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$. 17. $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$.

2.1.

1. Упатство: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB \parallel CD \wedge \overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD} \wedge \overline{AC} = \overline{BD} \Leftrightarrow ABCD$ е паралелограм. 2. Упатство: Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права тогаш земи го предвид тврдењето во претходната задача 1. Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на иста права, тогаш избери

вектор $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ што не лежи на таа права. **3. Упатство:** Точката О лежи на отсечката АВ и $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$. **4.** а) да; б) не; в) да; г) да; д) не. **5.** Точни се исказите под а), в) и д). **6.** $\vec{a} = \vec{c}$ и $\vec{m} = \vec{p}$.

2.2.1.

2. Упатство: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. **4.** а) збирот $\vec{a} + \vec{b}$ има иста насока со векторот $\vec{a}$, а за модулот важи $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$, б) збирот $\vec{a} + \vec{b}$ има иста насока со векторот $\vec{b}$, а за модулот важи $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$, в) збирот $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, па насоката е неопределена, а за модулот имаме $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{0}| = 0$. **5.** а) (AB); б) (AD); в) (DA); г) (BD).

2.2.2.

2. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. **3. Решение:** Нека ABCD е паралелограм и $S = AC \cap BD$ е пресекот на неговите дијагонали. За да покажеме дека S е средина на отсечките AC и BD доволно е да докажеме дека $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$. Од $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{SD}$, добиваме дека $(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$, односно $(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$. Бидејќи $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$, имаме $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$. Но векторот $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{AC}$, а векторот $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{BD}$. Векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не се колинеарни. Според тоа $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$. За доказ на обратното тврдење претпоставуваме дека S е средина на дијагоналите на четириаголникот ABCD. Ќе покажеме дека четириаголникот е паралелограм. За таа цел доволно е да докажеме дека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Бидејќи S е средина на отсечката AC имаме $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}$. Слично, S е средина на отсечката BD, па $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SD}$. Тогаш $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{DC}$. **4.** а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\vec{0}$; г) $\overrightarrow{AB}$. **5.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$.

2.3.

2. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 10$. **3.** а) $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$ или аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е прав; б) аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е остар, аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е тап. **4.** а) $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$. **5.** $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{DA} = \vec{a} + \vec{b}$.

2.4.

4. а) $\vec{a}$; б) $-\vec{2c}$. **5.** а) $\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{x}$ е произволен вектор. **6. Решение:** Претпоставуваме дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат триаголник, односно постои триаголник ABC таков што $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Тогаш $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Обратно, претпоставуваме дека $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Нека A е произволна точка и нека B и C се две точки такви што $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$. Тогаш $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{c})$. Од $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ следува дека $\vec{b} = -(\vec{a} + \vec{c}) = \vec{0}$, па $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, односно векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ го формираат триаголникот ABC. **7. Решение:** За произволна точка M важи $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$. Бидејќи векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, како и

векторите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$, се спротивни, имаме $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Ако ги собереме четирите горенаведени равенства добиваме $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4 \cdot \overrightarrow{MO}$. **8. Решение:** Бидејќи M е средина на отсечката AB , а N е средина на отсечката CD , имаме $2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD}$, па $2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, и $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

2.5.

1. а) $x=1$, $y=2$; б) не постојат такви x и y . **2. Решение:** Нека MN и PQ се средните линии во четириаголникот $ABCD$ и нека S е средина на MN . Тогаш за произволна точка O , имаме $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC})\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$, од каде што следува дека S е средина и на средната линија PQ . **3.** $p=0$.

4. Упатство: Од $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AN} + \lambda \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\vec{a} + \lambda\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$ и $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \mu\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$ имаме $\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \mu\right)\vec{a} = \left(-\lambda - \frac{\mu}{2}\right)\vec{b}$. $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$.

2.6.

1. а) Линеарно зависни; б) линеарно зависни. **2.** а) Линеарно зависни; б) линеарно независни. **3.** Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. **4.** $\lambda = -9$, $\mu = -\frac{1}{3}$. **5. Упатство:** Од

векторското равенство $\alpha\vec{r} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{t} = \vec{0}$ го добиваме системот
$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$
 кој има единствено решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$. **6.** $p = -\frac{1}{7}$.

2.7.

1. а) $a_x = 1$, $a_y = 4$, $a_z = 1$; б) $a_x = -2$, $a_y = 1$, $a_z = -1$; в) $a_x = 0$, $a_y = 1$, $a_z = -2$; г) $a_x = 1$, $a_y = 0$, $a_z = 3$. **2.** а) $\vec{a} = -\vec{j} + 4\vec{k}$; б) $\vec{a} = 7\vec{i} - \vec{k}$; в) $\vec{a} = -2\vec{j}$; г) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$.

2.8.

1. а) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (-1, 1, -1)$; б) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (-12, 4, 3)$. **2.** а) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (3, 9, -2)$; б) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (-3, 8, 8)$. **3.** а) $3\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 = \left(-\frac{13}{2}, 21, 21\right)$; б) $-2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (1, -9, -14)$; в) $\vec{a}_1 - 6\vec{a}_2 = \left(-\frac{23}{2}, 21, 7\right)$. **4.** а) $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3 = (-10, 20, 2)$; б) $2\vec{a}_1 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = (1, -5, -7)$; в) $-\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 - 4\vec{a}_4 = (3, 9, -6)$. **5. Решение:** Нека се дадени векторите $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Ако $a_x = b_x$, $a_y = b_y$.

и $a_z = b_z$, тогаш $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = \vec{b}$, односно $\vec{a} = \vec{b}$. Обратно, ако $\vec{a} = \vec{b}$ тогаш $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ или изразено со помош на координати $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$. Според тоа, $\vec{0} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}$. Бидејќи векторите $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ се линеарно независни, добиваме дека $a_x - b_x = 0$, $a_y - b_y = 0$ и $a_z - b_z = 0$, односно $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ и $a_z = b_z$. 6. $|\vec{a}| = 3\sqrt{5}$. 7. Упатство: Од векторското равенство $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ го добиваме

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \text{ кој има единствено решение } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2.9.

1. Упатство: $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow |\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| = 0$. $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{e}) \Rightarrow \left| \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} \right| = |\vec{a}| |\cos(\vec{a}, \vec{e})| \Rightarrow |\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| = |\vec{a}| |\cos(\vec{a}, \vec{e})|$. $|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\cos(\vec{a}, \vec{e})| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0$ или $|\cos(\vec{a}, \vec{e})| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0$ или $(\vec{a}, \vec{e}) = \frac{\pi}{2}$. 2. Упатство: Од $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{e}) \Rightarrow \left| \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} \right| = |\vec{a}| |\cos(\vec{a}, \vec{e})| \Rightarrow |\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| = |\vec{a}| |\cos(\vec{a}, \vec{e})|$.

Заради $|\cos(\vec{a}, \vec{e})| \leq 1$ имаме $|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| \leq |\vec{a}|$. Од $|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| = |\vec{a}| |\cos(\vec{a}, \vec{e})|$ имаме $|\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{e}) = 0$

или $(\vec{a}, \vec{e}) = \pi$. 3. а) $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{e}) = 6 \cos 60^\circ = 3$, б) 0, в) 5, г) -6. 4. Решение:

$|\vec{a}| |\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos(\vec{b}, \vec{a})| = |\vec{b}| |\vec{a}| |\cos(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{b}| |\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}|$. 5. Упатство: На оската p која има иста насока со $\vec{e}$ избираме точка O и ги конструираме векторите $(OA) \in \vec{a}$ и $(OB) \in \vec{b}$ (направи цртеж). Ако ги означиме со A_1 и B_1 ортогоналните проекции на точките A и B на оската p , тогаш од сличноста на триаголниците OAA_1 и OBB_1 имаме $|\overline{OB_1}| = \lambda |\overline{OA_1}|$. Да забележиме дека $(OA_1) \in \text{pr}_p \vec{a}$ и $(OB_1) \in \text{pr}_p \vec{b}$.

6. а) $\frac{\text{pr}_{\vec{e}} 3\vec{a}}{e_0} = 3 \frac{\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}}{e_0} = 3 \cdot (-3) = -9$; б) 7; в) $\frac{21}{2}$.

2.10.1.

1. а) 6; б) 9; в) 16; г) -72. 2. Упатство: Се користи комутативноста, асоцијативноста и дистрибутивноста на скаларното множење. 3. а) позитивен; б) негативен. 4. $\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{1}{7}$.

5. $|\vec{p}| = \sqrt{14 + \sqrt{2}}$. 6. Решение: Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол при темето C . Ако ставиме $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, тогаш $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (направи цртеж). Доказот следува од $|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, бидејќи $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$7. \cos \varphi = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha}}.$$

2.10.2.

1. а) -3; б) 11. 2. а) 7; б) $\sqrt{26}$. 3. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$. 4. а) не; б) да. 5. $\vec{x} = (-4, 2, -4)$.
 6. $\vec{x} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \right)$ и $\vec{x} = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \right)$. 7. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=15$, $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c})$

Одг. да.

2.11.1.

1. Упатство: Од $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{13}$ имаме $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{12}{13}$. Тогаш $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 72$. 2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{p} - 16\vec{q} + 10\vec{r}$. 3. Упатство: Се користи антикомутативноста, асоцијативноста и дистрибутивноста на векторското множење. 4. $P = \frac{105\sqrt{2}}{2}$. 5. $P = \frac{1}{4}$.
 6. $h = \frac{19}{5}$. 7. Упатство: Докажи дека $(\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$

2.11.2.

1. а) $\vec{a} \times \vec{b} = (3, 0, 2)$; б) $\vec{a} \times \vec{b} = (-5, 1, -7)$. 2. а) $\vec{a} \times \vec{b} = (5, 1, 7)$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = (10, 2, 14)$;
 в) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}) = (-20, -4, -78)$. 3. $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. 4. $P = \sqrt{54}$. 5. $P = \frac{49}{2}$. 6. $\vec{x} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.
 7. $\vec{x} = (7, 5, 1)$. 8. $x = 6$, $y = 2$.

2.12.1.

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 48$. 2. $V = 27$. 3. $V = 84$. 4. Решение: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \sin \alpha \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

2.12.2.

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 25$. 2. $V = 25$. 3. Да. 4. $H = \frac{10\sqrt{59}}{59}$. 5. $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + \sqrt{2}$, $t_3 = 1 - \sqrt{2}$. 6. $p = -\frac{1}{7}$.

Задачи за вежбање

1. Упатство: Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ формираат четириаголник ако нивниот збир е нултиот вектор. Според тоа, $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + 2\vec{r}$. 2. а) $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$;
 б) $\vec{a} = 2\vec{c} - \vec{b}$. 3. $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$ и $\overrightarrow{EF} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$. 4. Решение: Бидејќи ODEF е паралелограм, имаме $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$. Тогаш $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF}) =$

$$= \vec{OD} + \vec{OD} - (\vec{OE} + \vec{OE}) + \vec{OF} + \vec{OF} = (\vec{OD} + \vec{OF}) + (\vec{OD} + \vec{OF}) - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \vec{OE} + \vec{OE} - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \vec{0}.$$

5. $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$, $\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. 6. Упатство: Од равен-

ството $(q-r)\vec{a} + (r-p)\vec{b} + (p-q)\vec{c} = \vec{0}$ го добиваме хомогениот систем
$$\begin{cases} q-r=0 \\ r-p=0 \\ p-q=0 \end{cases}$$
 чија

детерминанта е еднаква на нула. 7. $\vec{x} = k\vec{y} + m\vec{z}$, $k = \frac{bc-ad}{c-bd}$, $m = \frac{a-b^2}{c-bd}$. 8. Упатство: Од

векторското равенство $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ го добиваме системот
$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+2z=-3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$
 чије решение е

$x=1$, $y=2$ и $z=-2$. Според тоа $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$. 9. Упатство: Од $\vec{b} = k\vec{a}$ наоѓаме $-3\vec{p} + 2\vec{q} + y\vec{r} = kx\vec{p} - 4k\vec{q} - 6k\vec{r}$, од каде што заради условот дека $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ не се компланарни добиваме $k = -\frac{1}{2}$, $x=6$ и $y=3$. 10. Упатство: а) Од векторското равенство $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$

го добиваме системот
$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+y+2z=0 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$$
 чије решение е $x=k$, $y=z=-k$, каде k е произволен

реален број. Според тоа векторите се линеарно зависни, б) линеарно независни.

11. $\frac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{c_0} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 12. $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 4^2} = 3\sqrt{5}$, $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{3\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{4}{3\sqrt{5}}\vec{k}$,

$\cos \alpha = \frac{5}{3\sqrt{5}}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$, $\cos \gamma = \frac{4}{3\sqrt{5}}$. 13. $k = -\vec{b} \cdot \vec{c}$. 14. $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b})$. 15. а) $\vec{a} \times \vec{b} = (4, 5, 7)$;

б) $\vec{b} \times \vec{a} = (-4, -5, -7)$; в) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = (-8, -10, -14)$. 16. Упатство: Нека бараниот вектор е $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тогаш $\vec{a} \times \vec{b} = 2\lambda\vec{j} - 4\lambda\vec{k}$ и $\vec{c} \times \vec{d} = (2z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-2x)\vec{k}$. Од првиот услов

имаме
$$\begin{cases} 2z-y=0 \\ x-z=2\lambda \\ y-2x=-4\lambda \end{cases}$$
, додека од вториот услов добиваме
$$\begin{cases} 2z-y=0 \\ x-2z=\lambda \\ 2x-2y=2\lambda \end{cases}$$
. Од двата услова

добиваме $x=5$, $y=6$, $z=3$, односно $\vec{d} = 5\lambda\vec{i} + 6\lambda\vec{j} + 3\lambda\vec{k}$. 17. Упатство: Покажи дека

$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = 0$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = 0$. 18. Упатство: Нека $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Од условот на задачата имаме $\vec{p} \cdot \vec{a} = x+y+z=3$, $\vec{p} \times \vec{b} = -z\vec{i} + z\vec{j} + (x-y)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$, од каде што следува $x=y=2$, па $\vec{p} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. 19. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -7\vec{i} - 2\vec{j} - 21\vec{k}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 6\vec{i} + 60\vec{j} + 63\vec{k}$.

20. $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = 8\sqrt{3}$, $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}}$. 21. $P = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{\sqrt{286}}{2}$. 22. $P = 5\sqrt{3}$. 23. а) $x=2$

и $x = -1$, б) не постои x за кој векторите би биле паралелни. **24. Упатство:** Покажи дека $[\vec{MN}, \vec{i}, \vec{k}] = 0$, каде $\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON} = \vec{ON} - \vec{OM}$. **25.** $t = 3$. **26.** $V = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -6$. **27.** $H = \frac{23}{\sqrt{158}}$.

3.1.1.

1. $A(2, -3, 1)$, $B(-3, 1, 0)$, $C(4, -4, -2)$, $D(2, 0, -3)$, $E(0, 2, -1)$. 2. а) $A(1, -2, 0)$, $B(-2, 3, 0)$, $C(1, 3, 0)$; б) $A(0, -2, 4)$, $B(0, 3, 1)$, $C(0, 3, 2)$; в) $A(1, 0, 4)$, $B(-2, 0, 1)$, $C(1, 0, 2)$. 3. а) $\vec{AB} = (1, 2, 2)$; б) $\vec{BA} = (-1, -2, -2)$; в) $\vec{AC} = (-2, 1, 2)$; г) $\vec{BD} = (0, 1, -3)$; д) $3\vec{BD} = (0, 3, -9)$; е) $\vec{AC} + \vec{BD} = (-2, 2, -1)$; ж) $2\vec{AC} + \vec{BD} = (-4, 3, 1)$. 4. $B(2, -1, -1)$. 5. а) $d = \sqrt{131}$; б) $d = 2\sqrt{5}$; в) $d = 3\sqrt{2}$; г) $d = \sqrt{61}$. 6. $L = 3 + \sqrt{58} + \sqrt{69}$.

3.1.2.

1. а) $M(2, 5, 1)$; б) $M(0, 0, 0)$. 2. $B(10, -2, -3)$. 3. а) $M\left(5, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$; б) $M\left(6, \frac{11}{5}, \frac{17}{5}\right)$; в) $M(-7, -3, -7)$; г) $M(18, 7, 13)$. 4. $M_1\left(-1, -1, -\frac{12}{5}\right)$, $M_2\left(1, 0, -\frac{9}{4}\right)$, $M_3\left(3, 1, -\frac{6}{5}\right)$, $M_4\left(5, 2, -\frac{3}{5}\right)$. 5. $S_{AB}(9, 1, -13)$, $S_{BC}(10, 1, 2)$, $S_{AC}(0, 4, 3)$. 6. $T\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, 2\right)$. 7. $C(4, -12, 4)$.

3.2.1.

1. $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - 5 = 0$. 2. $\vec{r} \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j}) - 5 = 0$. 3. Задачата има две решенија: $\vec{r} \cdot (5\vec{i} - 2\vec{j} + 15\vec{k}) - 12 = 0$ или $\vec{r} \cdot (-5\vec{i} + 2\vec{j} - 15\vec{k}) - 12 = 0$. 4. рамнината под б). 5. а) $\vec{n}_0 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$, $p = 3$; б) $\vec{n}_0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $p = 33$; в) $\vec{n}_0 = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $p = 10$.

3.2.2.

1. а) $\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}\right) - \frac{1}{7} = 0$; б) $\vec{r} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right) - 4 = 0$. 2. а) $p = \frac{36}{\sqrt{74}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{i}) = \frac{2}{\sqrt{74}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{j}) = -\frac{5}{\sqrt{74}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{k}) = \frac{7}{\sqrt{74}}$; б) $p = \frac{16}{\sqrt{2}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{i}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{k}) = 0$; в) $p = \frac{16}{\sqrt{10}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{i}) = 0$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{j}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos(\vec{n}_0, \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$. 3. $z = 17$. 4. Упатство: Покажи дека рамнините зададени со равенките $2x + 10y - 11z = -6$ и $8x + 40y - 44z = 15$ се паралелни. Првата рамнина е на онаа страна од координатниот почеток кон која е насочен нормалниот вектор $\vec{n} = (2, 10, -11)$, додека втората рамнина е на спротивната страна. Според тоа, координатниот почеток лежи во просторот меѓу двете рамнини. Слично, рамнините зададени со равенките $28x - 10y - 4z = 11$ и $14x - 5y - 2z + 3 = 0$, како и рамнините зададени со равенките $3x + 6y + 6z + 1 = 0$ и $x + 2y + 2z - 5 = 0$ се паралелни. Направи слична дискусија за положбата во просторот на координатниот почеток. 5. а) Паралелна на xu -рамнината; б) паралелна на yz -рамнината; в) паралелна на xz -рамнината; г) минува низ

координатниот почеток; д) паралелна на y -оската; е) паралелна на z -оската; ж) ја содржи z -оската.

3.2.3.

1. а) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$; б) $\frac{x}{-\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{4}} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1$; в) $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} + z = 1$. 2. $a = 2$, $a = 4$, $c = -2$.
3. $k = -\frac{6}{5}$. 4. $k = -\frac{1}{12}$. 5. 4 кубни единици.

3.2.4

1. $3x + 7y - 25 = 0$. 2. $3x - 2y + 5z - 2 = 0$. 3. а) $z + 4 = 0$; б) $y - 6 = 0$; в) $x + 2 = 0$.

3.2.5.

1. $22x - 26y + 32z - 150 = 0$. 2. а) Не; б) да, $2x + 5y - 3z + 10 = 0$; в) да, $x + y + z - 1 = 0$.
3. Да.

3.2.6.

1. $\frac{5}{\sqrt{13}}$. 2. Да. 3. $(6 + 2\sqrt{3}, 0, 0)$. 4. $\frac{8}{\sqrt{206}}$. 5. $2x + 2y - z - 26 = 0$. 6. $\frac{24}{\sqrt{91}}$.

3.2.7.

1. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$. 2. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}$. 3. $x - y - z - 2 = 0$. 4. Упатство: Нормалниот вектор на бараната рамнина е векторскиот производ $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Бараната равенка гласи $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = 0$, односно $[\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{n}_1, \vec{n}_2] = 0$.

3.3.1.

1. $x = 1 + 7t$, $y = 3 - 4t$, $z = -2 + 2t$. 2. M_1 . 3. $x = 2 + 4t$, $y = -1 - 5t$, $z = 3 + 6t$,
 $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-3}{6}$. 4. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$.

3.3.2.

1. а) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2}$; б) $\frac{x-3}{-4} = \frac{z-2}{-2}$, $y-1=0$. 2. $\frac{x}{-1} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$. 3. АВ: $\frac{x}{4} = \frac{z-2}{2}$, $y=0$.
АС: $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$, АД: $\frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-4}$, ВС: $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-5}$, BD: $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-7}$, CD:
 $\frac{x-5}{-6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-2}$. 4. Да. 5. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2}$, $z=0$. 6. $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-7}{-8}$, $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+4}{3}$,
 $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-4}{11}$.

3.3.3.

1. $2\sqrt{2}$. 2. $\sqrt{2}$. 3. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. 4. Точката N. 5. $h_C = 1$, $h_B = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $h_A = \sqrt{3}$.

3.3.4.

1. а) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{42}$, б) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{6}$. 2. $\cos \alpha = \frac{13}{189}$. 3. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{70}}{105}$. 4. Да.

5. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$.

3.3.5.

1. $\sin \alpha = \frac{11}{\sqrt{109}\sqrt{238}}$. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$. 4. $A = -1$.

3.4.1.

1. а) Рамнините се паралелни; б) рамнините се паралелни; в) рамнините се совпаѓаат; г) рамнините се сечат. 2. а) $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{11}$; б) $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{3}$. 3. $5x - y - 7 = 0$. 4. $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$. 5. $B = -6$, $D = -27$.

3.4.2.

1. а) Да; б) да. 2. $a = 3$, $S(1, -2, 5)$. 3. $a = 3$, $x + 2y - 5z = 0$. 4. $\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}$. 5. $\frac{x}{8} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+9}{1}$.

3.4.3.

1. $(2, 3, 1)$. 2. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-2}{1}$. 3. Да. 4. $8x - 9y - 22z - 59 = 0$. 5. $5x + 7y + 9z - 44 = 0$.

Задачи за вежбање

1. а) $M_{xy}(3, -1, -2)$, $M_{xz}(3, 1, 2)$, $M_{yz}(-3, -1, 2)$; б) $M_1(-3, 1, -2)$. 2. а) $d_{OM} = 13$; б) $d_x = 5$, $d_y = 4\sqrt{10}$. 3. $\cos \varphi_1 = \frac{2\sqrt{10}}{11}$, $\cos \varphi_2 = \frac{3\sqrt{13}}{11}$, $\cos \varphi_3 = \frac{\sqrt{85}}{11}$. 4. $P = 9$ квадратни единици. 5. Упатство. Докажи дека средините на отсечките PQ, MN и KL имаат исти координати. 6. $A\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right)$, $B\left(\frac{11}{3}, 7, -13\right)$. 7. Да. 8. а) $y + 5 = 0$, б) $x + 3y = 0$, в) $9y - z - 2 = 0$. 9. а) -6 , 4 , 12 ; б) 3 , 15 , -5 ; в) 1 , -1 , 1 . 10. $x + y + z - 3 = 0$. 11. а) $-\frac{2}{3}x - \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - 4 = 0$; б) $-\frac{6}{11}x + \frac{6}{11}y + \frac{7}{11}z - 3 = 0$. 12. $6x + 2y + 3z \pm 42 = 0$. 13. $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \gamma = -\frac{2}{3}$. 14. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. 15. $h_A = 3$. 16. а) $x - 4y + 5z + 15 = 0$; б) $2x - y - z = 0$; в) $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$. 17. $M_1(0, 0, 3)$, $M_2\left(0, 0, -\frac{5}{2}\right)$. 18. ABC: $x - 3y - z + 2 = 0$, ABD: $x - 4y - z + 2 = 0$, ACD: $2x - 8y - 3z + 6 = 0$, BCD: $2x - 11y - 3z + 9 = 0$. 19. $x + 20y + 7z - 12 = 0$ и $x - z + 4 = 0$.

20. $x-1 = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$. 21. $\frac{x}{8} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+9}{1}$. 22. $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7}$. 23. $4x+5y-2z=0$.
 24. $11x-17y-19z+10=0$. 25. $\frac{x+9}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-1}$. 26. $17x-13y-16z-10=0$.
 27. $\frac{x-1}{68} = \frac{y}{70} = \frac{z-7}{-67}$. 28. $M(2,-3,5)$. 29. $M_p(4,1,1)$. 30. $M_s(-9,10,1)$. 31. $M_s(-4,1-3)$.

4.1.

1. а) Да; б) да. 2. Да. 3. Да. 4. а) Да; б) не бидејќи A_2 не е задоволено. 5. а) Да; б) да.
 6. Не, бидејќи множеството не е затворено во однос на множење со скалар. 7. Да.

4.2.

1. а) Да; б) да; в) да; г) не; д) не; е) да. 2. $\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4t = 0 \end{cases}$ 3. Не мора.
 5. U_2, U_4, U_5 . 6. Не.

4.3.

1. Не. 2. $v = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3$. 3. $k = -8$. 4. а) V ; б) U_3 . 5. $P(t) = 4P_1(t) + 2P_2(t) - 3P_3(t)$.

4.4.

1. Не. 2. $U \oplus W \neq \mathbb{R}^3$. 6. Упатство: Секоја функција f може да се запише како
 $f(x) = \frac{f(x) - f(x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ каде што $\frac{f(x) - f(x)}{2} \in U$, а $\frac{f(x) + f(-x)}{2} \in W$. Освен тоа покажи
 дека $U \cap W$ се состои само од нултата функција, односно нултиот вектор.

4.5.

1. а) Независни; б) зависни; в) зависни; г) независни. 2. а) независни; б) зависни.
 3. $\lambda = 3$.

4.6.

1. а) Не; б) не; в) да; г) не. 2. а) 2; б) 3. 3. $\dim V = 2$, а $\{P_1(t), P_3(t)\}$ е база. 6. а) $\dim U = 2$,
 а една база е $\{(2,3,1,-4), (-3,-8,3,5)\}$; б) Едно проширување е $(2,3,1,-4), (-3,-8,3,5), (1,0,0,0), (0,1,0,0)$.

4.7.

1. $[v] = (2, -1, 1)$. 2. $[v] = (a, b-a, c-b, d-c)$. 3. $[P(t)] = (1, 0, -2, 1)$. 4. а) $(3, -5, 3)$;
 б) $(a-b, b-c, c)$.

Задачи за вежбање

2. Не. 3. а) Да; б) не. 4. а) Не; б) да; в) не; г) да. 5. а) $\{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$; б) $\{(0,0,0)\}$.
 6. а) $\mathbb{R}^3$; б) $W = \{(a, a+c, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$. 7. $U + W = \mathbb{R}^3$, $U \cap W = \{(0, 2t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. 10. а) Не; б) да;
 в) не. 11. а) Не; б) не. 12. Нека $w \in S$. Бидејќи $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ е максимално независно
 подмножество од S , $\{v_1, v_2, \dots, v_m, w\}$ е линеарно зависно. Затоа, w е линеарна комбинација
 од векторите $v_1, v_2, \dots, v_m$, односно $w \in L(v_1, v_2, \dots, v_m)$. Затоа, $S \subseteq L(v_1, v_2, \dots, v_m)$, па

$V = L(S) \subseteq L(v_1, v_2, \dots, v_m) \subseteq V$. Значи, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ го генерира V , па е база бидејќи е независно. 13. а) $(3, 3, 9, 0) = 2(1, 2, 1, 1) + 2(1, 1, 3, 0) - (1, 3, -1, 2)$, $(0, -5, 10, -5) = (1, 2, 1, 1) + 3(1, 1, 3, 0) - 2(1, 3, -1, 2)$; б) $\{(1, 2, 1, 1), (1, 1, 3, 0)\}$. 14. а) 3; б) 2. 15. 3. 16. а) 1; б) 2. 17. а) 1; б) 0; в) такви потпростори не постојат. 18. Упатство: Користи дека, ако A и B се конечни множества, тогаш $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, каде со $|X|$ е означен бројот на елементи на множеството X . Доказот го користи точно овој факт, при што множеството A се избира да формира база на U , а множеството B да биде база на W и притоа $A \cap B$ да биде база на $U \cap W$. За таа цел првин избори база за $U \cap W$, а потоа неа прошири ја до база на U . Базата за $U \cap W$ потоа прошири ја до база на W . Потоа, докажи дека $A \cup B$ претставува база за $U + W$. 19. $U \cap W \subseteq U$, па $\dim U \cap W \leq \dim U = 4$. $\dim U + W \leq 6$, бидејќи $U + W \subseteq \mathbb{R}^6$, па $\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim U + W \geq 4 + 5 - 6 = 3$. 20. $[e_1] = (0, 0, 1, -2)$, $[e_2] = (1, 0, -1, 2)$, $[e_3] = \left(0, 0, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $[e_4] = \left(0, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

5.1.

1. а) $x = -2y + 3z - 2u + 4$, (y, z, u) се произволни; б) $x = 2 - y - u + \frac{3}{2}z$, (y, z, u) се произволни. 3. Димензиите на потпросторите се а) 2; б) 3; в) $n-1$. 4. а) да; б) да. 5. Решение. Нека $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ е решение на (2), односно $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = b_i$, $(1 \leq i \leq m)$ и нека $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ е решение на (3), односно $a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{in}w_n = 0$, $(1 \leq i \leq m)$. Тогаш за $1 \leq i \leq m$ имаме $a_{i1}(u_1 + w_1) + a_{i2}(u_2 + w_2) + \dots + a_{in}(u_n + w_n) = (a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n) + (a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{in}w_n) = b_i + 0 = b_i$, од каде што следува дека Тоа покажува дека $u + w$ е решение на (2). Обратно, нека $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ е произволно решение на (2), односно $a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n = b_i$, $(1 \leq i \leq m)$. Тогаш $v = u + (v - u)$. Ќе покажеме дека $v - u$ е решение на (3). Навистина, $a_{i1}(v_1 - u_1) + a_{i2}(v_2 - u_2) + \dots + a_{in}(v_n - u_n) = (a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n) - (a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n) = b_i - b_i = 0$, за произволно $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Затоа, $v - u$ е решение на (3). 6. $(3t, -t, -2t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

5.2.

1. $x = y = 1$, $z = t = -1$. 2. Системот нема решение. 3. $x = \frac{1}{4}(-a + b + c + d)$, $y = \frac{1}{4}(a - b + c + d)$, $z = \frac{1}{4}(a + b - c + d)$, $t = \frac{1}{4}(a + b + c - d)$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$. 5. $x = \frac{z - 9t - 2}{11}$, $y = \frac{-5z + t + 10}{11}$. 6. $x = 5$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 2$, $u = 1$. 7. $x = \frac{-6 + 8t}{7}$, $y = \frac{1 - 13t}{7}$, $z = \frac{15 - 6t}{7}$, t произволно. 8. Ако $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$, системот има единствено решение $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}$; ако $\lambda = 1$, системот има бесконечно решенија $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, каде x_2 и x_3 се произволни; ако $\lambda = -2$, системот е противречен. 9. ако $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -3$, системот има

единствено решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda + 3}$; ако $\lambda = 1$, системот има бесконечно решенија

$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, каде x_2, x_3, x_4 се произволни; ако $\lambda = -3$, системот е противречен.

10. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 11. $x_4 = \frac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11}$, $x_5 = \frac{-3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}$, x_1, x_2, x_3 се

произволни. 12. Ако $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -3$, системот има само нулто решение; ако $\lambda = 1$, системот има бесконечно решенија $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, каде x_2, x_3, x_4 се произволни; ако $\lambda = -3$, системот има решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, t \in \mathbb{R}$.

5.3.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 4. $x = -1, y = z = 0$. 5. Не.

5.4.

1. $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 13 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. 2. $x = 5, y = 0, z = 2, t = -3$. 4. Не, бидејќи третата матрица е разлика на

првата со втората матрица.

5.5.

1. AB е $m \times m$ матрица, BA е $n \times n$ матрица. $AB \neq BA$ ако $n \neq m$. 3. а) $AB = -2$,
 $BA = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. 4. а) $\begin{bmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

5.6.

2. Матрицата AD се добива од матрицата A кога првата колона ќе се помножи со a_1 , втората колона ќе се помножи со a_2 итн., а матрицата DA се добива од матрицата A кога првата редица ќе се помножи со a_1 , втората редица ќе се помножи со a_2 итн.

3. $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$. 4. а) симетрична; б) симетрична ако m е парен број, антисиметрична ако m е непарен број. 8. Една база на тој простор формираат: сите матрици од облик $E_{ij} + E_{ji}$ за $1 \leq i < j \leq n$, заедно со матриците $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$, каде E_{ij} е матрица со единица во i -та редица и j -та колона, а сите други елементи се нули. 9. Една база на тој простор формираат: сите матрици од облик $E_{ij} - E_{ji}$ за $1 \leq i < j \leq n$, каде E_{ij} е матрица со единица во i -та редица и j -та колона, а сите други елементи се нули.

5.7.

1. а) -7 ; б) $[-1, 5]$; в) $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$.

5.8.

1. f е линеарно пресликување само под а) и в). 2. Да. 3. Да. 6. **Решение.** Нека векторите $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ и $f(0,0,1)$ го означиме соодветно со a , b и c . Тогаш од условот на задачата имаме $x + y = (2,1)$, $y + z = (0,-1)$ и $x + z = (1,1)$. Со решавање на овој систем се добива

$$f(1,0,0) = x = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad f(0,1,0) = y = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad f(0,0,1) = z = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \quad \text{Оттука добиваме}$$

$$f(x, y, z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = \left(\frac{3x + y - z}{2}, \frac{3x - y - z}{2}\right).$$

5.9.

1. $f^{-1}(x, y) = (x - y, y)$. 3. $ad - bc \neq 0$. 4. $A = -7E_1 + 11E_2 + 30E_3 - 2E_4$, $[A] = (-7, 11, 30, -21)$. 5. Да.

5.10.

1. Јадрото се состои само од нултиот вектор. 2. Множеството на слики се состои само од нултиот вектор. 3. а) $\{(1,1)\}$, $\{(1,2,0), (0,0,1)\}$; б) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\emptyset$; в) $\{(1,1,2), (0,1,0)\}$, $\{(1,0,-1)\}$; г) $\{(1,0,1), (0,1,-1)\}$, $\{(3,-1,1)\}$. 4. $f(x, y, z) = x(1,0,-1) + y(2,1,-1) = (x + 2y, y, -x - y)$. 5. $\{(0,0,0)\}$, $\mathbb{R}^3$.

5.11.

2. $f \circ g$ не постои, а $(g \circ f)(x, y, z) = (y + z, 2x)$. 3. Векторите со почеток во координатиот почеток ги ротира за агол ϑ . 4. Сите линеарни пресликувања $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ се од облик $f(x) = kx$ за некој реален број k . 5. **Решение.** f^{-1} постои, бидејќи f е биекција. За да покажеме дека f^{-1} е линеарно пресликување, избираме произволни елементи $x', y' \in V$. Нека $x, y \in V$ се такви што $x' = f(x)$ и $y' = f(y)$. Тогаш $f^{-1}(ax' + by') = f^{-1}(af(x) + bf(y)) = f^{-1}(f(ax + by)) = ax + by = af(x') + bf(y')$, па f^{-1} е линеарно пресликување.

5.12.

1. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 2. Нулта матрица, Единична

матрица. 3. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$. 4. $[f + g] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $[g \circ f] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $[2f] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

5.13.

3. Системот а) нема решение; б) има бесконечно решенија; в) има едно решение.

5.14.

3. а) Да; б) да. 4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$); $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 5. Не. 6. а) Да; б) не.

5.15.

2. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$. 3. $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{ss} = 1$, а

сите останати елементи се еднакви на нула. 4. а) $[1 \ 0 \ 0]^t$, б) $[1 \ a \ b]$ или $[0 \ 1 \ a]$ или $[0 \ 0 \ 1]$. 5. Упатство. Рефлексивноста и транзитивноста лесно се покажуваат. За да се докаже симетричноста, потребно е претходно да се покаже дека секоја од трите елементарни трансформации со матрици има своја инверзна трансформација, која исто така е елементарна трансформација. Навистина, инверзна на трансформацијата $R_i \leftrightarrow R_j$ е самата таа трансформација; инверзна на трансформацијата $R_i \rightarrow kR_i$, ($k \neq 0$) е трансформацијата $R_i \rightarrow \frac{1}{k}R_i$, ($\frac{1}{k} \neq 0$); инверзна на трансформацијата $R_i \rightarrow kR_j + R_i$, е трансформацијата $R_i \rightarrow -kR_j + R_i$. Затоа ако со низата елементарни трансформации $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_r}$ матрицата A се трансформира до матрица B , тогаш со низата елементарни трансформации $(E_{i_r})^{-1}, (E_{i_{r-1}})^{-1}, \dots, (E_{i_1})^{-1}$ матрицата B се трансформира до матрицата A .

5.16.

1. Не. 2. Не. 3. Да. 4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5.17.

1. а) 3; б) 4; в) 2. 2. а) 2; б) 2; в) 3. 3. 3. 5. Бидејќи рангот на една матрица е релативниот ранг, затоа рангот е помал или еднаков на n . Но, бидејќи рангот на една матрица е еднаков на колоничниот ранг, затоа рангот е помал или еднаков на m . Според тоа, рангот е помал или еднаков од помалиот од броевите n и m . 6. Ќе се намали за единица, или нема да се промени.

5.18.

1. а) Има решение, нема решение. 2. а) Има решение; б) нема решение. 3. 1. 4. Димензијата е 0, бидејќи нултото решение е единствено. 5. 4.

5.19.

1. а) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$; г) матрицата е сингуларна.

2. а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$; б) матрицата е сингуларна; в) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

3. а) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; в) матрицата е сингуларна.

4. $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$. 5. Упатство: Равенката ја запишуваме како $(2I - A)X = B$, па

$X = (2I - A)^{-1}B$ (редоследот на множителите не смее да се менува!). Одг. $X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Упатство: Користи ја теорема 3 од V.12.

5.20.

1. Упатство: Трансформирај ја најпрво матрицата A до единична матрица. Одг.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 2. а) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) матрицата е сингуларна. 3. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 13 & -4 & -32 \\ -5 & 1 & 15 \end{bmatrix}$. 4. а) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$. 5. а) $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -10 & 6 & 3 \\ -11 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, б) $Y = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 & 16 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Не.

Задачи за вежбање

1. а) Системот нема решение; б) $(11t, 2t, -3t)$, $t \in \mathbb{R}$; в) $x = 104\frac{6}{7}$, $y = 7\frac{4}{7}$, $z = -10$, $t = 1$.

3. а) I_2 ; б) $\begin{bmatrix} 17 & 16 & 44 \\ 16 & 39 & 38 \\ 22 & 19 & 14 \end{bmatrix}$; в) I_3 . 5. $A = 2E_1 - 2E_2 + E_3$, $[A] = (2, -2, 1)$. 6. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ако n е парен

број, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ако n е непарен број; б) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$. 8. Да.

9. а) $(g \circ g)(x) = 4x - 9$; б) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$; в) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$;

г) $(f \circ f)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$. 10. а) Не постојат; б) $(h \circ f)(x, y, z) = (x + z, 2y)$ и $(h \circ g)(x, y, z) = (x - y, 4z)$; в) $(h \circ (f + g))(x, y, z) = (h \circ f + h \circ g)(x, y, z) = (2x - y + z, 2y + 4z)$.

11. Упатство: Изрази ги векторите $(1,0)$ и $(0,1)$ како линеарна комбинација од $(1,2)$ и $(2,1)$ за да пресметаш $f(1,0)$ и $f(0,1)$. **Одг.** $f(x,y) = \left(\frac{-2x+4y}{3}, \frac{x+y}{3}, \frac{4x-2y}{3} \right)$. **12.** а) $(1,0,-1,3)$ и $(5,0,0,7)$;

б) $(0,0,0,7)$ не е слика, а $(4,4,4,9) = f(3,2,1)$. **13.** Не. **14.** а) $\text{ранг } A = \text{ранг } B = 2$, $\text{ранг } A+B=1$;
б) $\text{ранг } A=1$, $\text{ранг } B=2$, $\text{ранг } (A+B)=3$. **15.** а) Да; б) да; в) да; г) да; д) да; е) да; ж) да;

з) да; с) не. **16.** а) Нема; б) има; в) има. **17.** а) 2; б) 5. **18.** а) Да; б) не. **19.** а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **20. Упатство:** Покрај директната проверка, доказот може

да се изведе и на следниот начин: ако во задача 2, се стави $B=A^{-1}$, добиваме $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$, и оттука се добива даденото равенство. **21.** Такви матрици се следниве: единичната матрица, како матриците што се добиваат од единичната матрица со замена на местата на произволни две редици, како и множење на произволна

редица со -1 . **22.** а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; в) $-\frac{1}{a(a+3)} \begin{bmatrix} -(a+2) & 1 & 1 \\ 1 & -(a+2) & 1 \\ 1 & 1 & -(a+2) \end{bmatrix}$.

23. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 6 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **24.** а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **26.** Ако двете страни на равенството $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

се транспонираат, добиваме $(A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I$, од каде е $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

PROSVETNO DELO

АЗБУЧНИК

А

алгебарски комплемент, 18
алгебарска вредност на вектор, 50, 60
антисиметрична матрица, 159
адјунгирана матрица, 191

Б

база на векторски простор, 130
биекција, 161

В

векторски величини, 37
векторска алгебра, 37
вектор, 38
врзани вектори, 38
векторски производ, 69
векторска равенка на права, 100
векторски простор, 119
векторски потпростор, 120
вектор-редица, 151
вектор-колона, 151

Г

Гаусов метод, 30
горно триаголна матрица, 158

Д

детерминанти од втор дел, 5
детерминанта од трет ред, 14
Декартов координатен систем, 55
десен координатен систем, 55
директен збир на потпростори, 127
димензионален простор, 130
дијагонална матрица, 158
долно триаголна матрица, 159
домен, 161

Е

еднозначно решлив систем, 7
еквивалентни подредени пара, 37
единечен слободен вектор, 38
единични вектори, 55
елементарни трансформации на систем
линеарни равенки, 141
елементи на матрица, 151
еднакви матрици, 151
единична матрица, 159
еднакви пресликувања, 161
елементарни редични трансформации, 179

елементарна матрица, 189

З

збир на вектори, 40
збир на потпростори, 126
зависно множество, 130
збир на матрици, 152

И

инверзна слика на множество, 161
инјекција, 161
идентично пресликување, 162
инверзно пресликување, 162
изоморфизам, 165
изоморфни вектори, 166
издвоени елементи, 179
инверзибилна матрица, 190
инверзна матрица, 190

јдро на пресликување, 168

К

Крамерови формули, 9
колинеарни вектори, 38
количник на вектор со скалар, 46
количник на колинеарни вектори, 49
компланарни вектори, 52
координатни оски, 54
координатни рамнини, 54
координатен почеток, 55
координатни вектори, 55
координати на вектор, 56, 134
координати на точка, 82
канонични равенки на права, 101
колони на матрица, 151
квадратна матрица, 158
кодомен, 161
композиција на пресликување, 161
кернел на пресликување, 168
коэффициент на матрица, 177
колониен ранг, 185

Л

линеарно зависни вектори, 51
лев координатен систем, 55
линеарна комбинација на вектори, 124
линеарно зависни вектори, 128
линеарно независни вектори, 128

линеарна равенка со n непознати, 139

линеарно пресликување, 163

линеарна трансформација, 163

М

минор, 16

модул на вектор, 38

множење на вектори, 63

мешан производ на вектори, 75

матрица, 150

матрична репрезентација, 174

Н

неопределен систем, 7

нулто решение, 32

нула пар, 37

нулти вектор, 38

нормална векторска равенка на рамнина, 87

нормална скаларна равенка на рамнина, 88

независно множество, 128

нулта матрица, 153

нилпотентна матрица, 159

нулто пресликување, 164

несингуларно пресликување, 169

несингуларна матрица, 190

О

ортогонална проекција, 59

ортогонална проекција на слободен вектор, 59

општа векторска равенка на рамнина, 89

општа скаларна равенка на рамнина, 89

ортогонална матрица, 159

П

правило на триаголник, 40

правило на паралелограм, 40

производ на вектор со скалар, 46

параметарски равенки на права, 100

потпростор генериран (покривка), 124

партикуларно решение на систем од m линеарни равенки со n непознати, 140

производ на матрици со реален број, 153

производ на матрици, 161

пресликување, 161

Р

решлив систем, 7

разлика на вектори, 44

радиус вектор, 81

решение на линеарна равенка со n непознати, 139

разлика на матрици, 153

редично редуцирана скалеста форма, 179

редична канонична форма на матрици, 180

редичен ранг, 185

ранг на матрица, 186

регуларна матрица, 190

С

систем од две линеарни равенки со две непознати, 7

Сарусово правило, 15

скаларни величини, 37

слободни вектори, 38

спротивни вектори, 41

сегмент на оска, 91

сегментен облик на равенка на рамнина, 91

скалари, 119

систем од m линеарни равенки со n непознати, 140

скаларна матрица, 159

симетрична матрица, 159

слика на подмножество, 161

сурјекција, 161

сингуларно пресликување, 169

скалеста матрица, 179

Т

тројка вектори, 69

транспонирана матрица, 151

У

услов за колинеарност на два вектора, 74

услов за компланарност на вектори, 76

услов за ортогоналност на рамнините, 98

услов за ортогоналност на две прави, 105

Х

хомоген систем, 11

хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати, 31

хомоген систем од m линеарни равенки, 140

СОДРЖИНА

1. Детерминанти и систем линеарни равенки	5
1.1. Детерминанти од втор ред.....	5
1.2. Систем од две линеарни равенки.....	7
1.2.1. Систем од две равенки со две непознати.....	7
1.2.2. Систем од две равенки со три непознати.....	12
1.3. Детерминанти од трет ред	14
1.3.1. Дефиниција и основни својства.....	14
1.3.2. Развивање на детерминантата по елементите на дадена редица (колона).....	16
1.3.3. Својства на детерминантите од трет ред.....	18
1.4. Систем од три линеарни равенки со три непознати.....	23
1.4.1. Решение на системот и Крамерови формули.....	23
1.4.2. Гаусов метод.....	28
1.5. Хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати.....	31
Задачи за вежбање.....	34
2. Вектори.....	37
2.1. Основни поими.....	37
2.2. Собирање на вектори.....	39
2.2.1. Дефиниција на операцијата собирање на вектори.....	39
2.2.2. Својства на операцијата собирање на вектори.....	41
2.3. Одземање на вектори.....	44
2.4. Множење на вектор со скалар.....	45
2.5. Делење на колинеарни вектори.....	49
2.6. Линеарна комбинација на вектори.....	51
2.7. Координати на вектор.....	54
2.8. Операции со вектори зададени со координатни претставувања.....	57
2.9. Ортогонална проекција на вектор.....	59
2.10. Скаларен производ на вектори.....	63
2.10.1. Дефиниција и својства на скаларниот производ на вектори.....	63

2.10.2. Пресметување на скаларен производ со помош на координати.....	66
2.11. Векторски производ на вектори.....	68
2.11.1. Дефиниција и својства на векторскиот производ на вектори.....	68
2.11.2. Координати на векторски производ на два вектора.....	72
2.12. Мешан производ на три вектори.....	75
2.12.1. Дефиниција и геометриска интерпретација на мешан производ на три вектори.....	75
2.12.2. Пресметување на мешан производ со помош на координати.....	77
Задачи за вежбање.....	78
 3. Точка, права и рамнина во простор.....	81
3.1. Точка во простор.....	81
3.1.1. Растојание меѓу две точки.....	81
3.1.2. Делење на отсечка во даден однос.....	84
3.2. Рамнина.....	86
3.2.1. Нормална равенка на рамнина.....	86
3.2.2. Општа равенка на рамнина.....	89
3.2.3. Сегментна равенка на рамнина.....	91
3.2.4. Равенка на рамнина низ дадена точка.....	93
3.2.5. Равенка на рамнина низ три дадени точки.....	94
3.2.6. Растојание од точка до рамнина.....	95
3.2.7. Агол меѓу две рамнини. Услов за ортогоналност на две рамнини.....	97
3.3. Права.....	99
3.3.1. Разни видови равенки на права во простор.....	99
3.3.2. Равенка на права низ две точки.....	102
3.3.3. Растојание од точка до права.....	103
3.3.4. Агол меѓу две прави. Услов за ортогоналност на две прави.....	105
3.3.5. Агол меѓу права и рамнина.....	106
3.4. Заемни односи.....	108
3.4.1. Заемен однос на две рамнини.....	108
3.4.2. Заемен однос на две прави во просторот.....	111
3.4.3. Заемен однос на права и рамнина.....	114
Задачи за вежбање.....	115
 4. Векторски простори.....	119
4.1. Дефиниција на векторски простор.....	119
4.2. Векторски потпростори.....	122
4.3. Линеарна комбинација и линеарна покривка.....	124

4.4. Збир и директен збир на потпростори.....	126
4.5. Линеарна зависност и независност на вектори.....	128
4.6. База и димензија.....	130
4.7. Координати на вектор.....	134
Задачи за вежбање.....	135
5. Матрици и линеарни пресликувања.....	139
5.1. Линеарни равенки со повеќе непознати и систем линеарни равенки.....	139
5.2. Гаусов метод за решавање на систем линеарни равенки.....	143
5.3. Матрици. Транспонирани матрици.....	150
5.4. Собирање на матрици. Множење на матрица со број.....	152
5.5. Множење на матрици.....	155
5.6. Квадратни матрици.....	159
5.7. Поим за пресликување.....	161
5.8. Линеарни пресликувања.....	163
5.9. Биективни линеарни пресликувања (изоморфизми).....	165
5.10. Јадро и слика на линеарно пресликување.....	168
5.11. Операции со линеарни пресликувања.....	170
5.12. Матрична репрезентација на линеарни пресликувања.....	173
5.13. Матрици и системи линеарни равенки.....	177
5.14. Скалести матрици.....	178
5.15. Редична еквивалентност и елементарни трансформации со редии.....	179
5.16. Редичен простор на матрица.....	181
5.17. Ранг на матрица.....	185
5.18. Важноста на рангот на матрица за систем линеарни равенки.....	187
5.19. Инверзна матрица.....	190
5.20. Елементарни трансформации и примена.....	193
Задачи за вежбање.....	198
Одговори и решенија на задачите.....	203

ПРОСВЕТНО ДЕЛО - Скопје, ул. „Димитрија Чуповски“ број 15

*

За издавачот
м-р Павле Петров, генерален директор

*

КОСТАДИН ТРЕНЧЕВСКИ БИЛЈАНА КРСТЕСКА
ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ СНЕЖАНА ЗДРАВЕСКА

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА и АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА
за трета година на реформираното
гимназиско образование

*

Главен уредник
Весна ДУКОСКА

*

Лектура
Матилда САЗДОВА

*

Технички уредник
Новко ТРЕНЧЕВСКИ

*

Коректура
Авторице

Ракописот е предаден во печат во ноември 2017 година. Печатењето е завршено во декември 2017 год. Обем: 226 страници. Формат 20 x 25,5 cm. Тираж: 250 примероци. Книгата е отпечатена во печатницата АД „Напредок“ - Тетово.

CIP – Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“,
Скопје

512.64(075.3)
514.12(075.3)

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија : за трета година на реформираното гимназиско образование / Костадин Тренчевски, Билјана Крстеска, Глигор Тренчевски, Снежана Здравеска. – Скопје : Просветно дело, 2007, –226 стр. илустр.; 24 cm.

ISBN 9989-0-0386-6
1. Костадин Тренчевски
COBISS. MK-ID 58097418